

Comportamento postcritico delle strutture. Risposta di telai elastoplastici in acciaio tramite analisi avanzate in ambiente EE di Nòlian all-in-one

Francesco Oliveto , Ingegnere – utente Nòlian All-In-One – Softing S.r.l

1. SOMMARIO

Nel presente studio viene affrontato in modo semplificato e non esauriente uno dei fenomeni più insidiosi che comportano il collasso di alcune tipologie strutturali, ossia quello dell'instabilità o perdita di rigidità.

Si cercherà di evidenziare come per certe strutture, trascurare gli effetti legati alla non linearità geometrica quali effetti del II ordine e/o grandi spostamenti in presenza di imperfezioni strutturali di tipo statico o geometrico e l'interazione tra instabilità e plasticità, può comportare una sovrastima eccessiva del carico di collasso della struttura e quindi avere elevate probabilità che l'evento si manifesti con modalità totalmente diverse da quelle ipotizzate che possono portare in alcuni casi al crollo totale o parziale della struttura.

Dopo una breve parte teorica introduttiva, necessaria e indispensabile alla comprensione del fenomeno dell'instabilità strutturale e le varie forme in cui si manifesta, si presenterà un esempio significativo su un telaio piano modellato con l'ambiente All-in-one di Nòlian con l'estensione EE (Earthquake Engineering) che ci permetterà di effettuare tramite elementi finiti non lineari e metodi di analisi avanzate analisi elastoplastiche in grandi spostamenti necessari, la stima del carico di collasso strutturale.

2. INTRODUZIONE

La corretta valutazione della capacità portante delle strutture è il primo requisito che occorre soddisfare nelle analisi strutturali. Solo attraverso una corretta comprensione e modellazione del comportamento strutturale è possibile soddisfare questo requisito, che in generale non è facilmente perseguibile. La scelta del modello meccanico con cui vengono effettuate è quindi di fondamentale importanza. Assunzioni non coerenti o semplificate possono indurre a valutazioni errate della capacità portante della struttura. La letteratura fornisce un numero davvero elevato di modelli meccanici. L'uso di modelli molto generali in tutti i contesti è impensabile, occorre effettuare delle scelte ponderate che pur trascurando effetti di dettaglio della fenomenologia complessiva, permettono di descrivere qualitativamente e quantitativamente, con accettabile grado di approssimazione, il comportamento strutturale.

Le modalità di analisi previste dalle Norme Tecniche per le Costruzioni sono per le tipologie strutturali analizzate semplificate. Una volta determinate le sollecitazioni attraverso un'analisi del primo ordine si passa alla verifica delle singole sezioni utilizzando in molti casi formule teoriche corrette con coefficienti ottenuti da indagini. La normativa prevede comunque vari livelli di approfondimento per la valutazione delle sollecitazioni. Si passa da incrementi empirici delle sollecitazioni ottenute attraverso un'analisi elastica, ad analisi con non linearità geometriche e del materiale. A parte la modalità con cui vengono valutate le sollecitazioni sulla struttura, occorre sempre verificare che le sollecitazioni non superino la resistenza delle membrature.

3. INSTABILITÀ EULERIANA – CRISI PER PERDITA DI RIGIDEZZA

Per meglio comprendere una delle tante forme in cui si manifesta l'instabilità, prendiamo l'asta indeformabile a sinistra di fig.1 caricata ad un estremo da una forza trasversale P e vincolata all'altro estremo mediante una molla rotazionale elastica con rigidezza alla rotazione W .

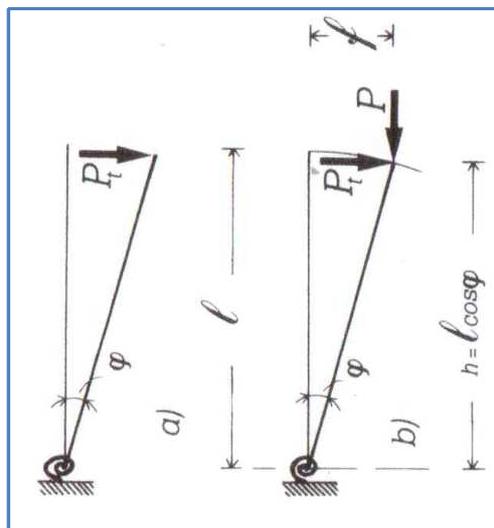


Fig.1 : Modello meccanico dell'asta (da Pozzati.P-1987)

Consideriamo una configurazione deformata definita dall'angolo φ sistema ad un grado di libertà ed imponiamo l'equilibrio in tale condizione:

$$P \cdot l \cos \varphi = W \cdot \varphi$$

L'equazione rappresenta il legame esatto fra carichi e spostamenti in quando l'equilibrio è imposto tenendo conto degli spostamenti della struttura. Si fa notare che nonostante il legame costitutivo della molla è lineare l'equazione di equilibrio è non lineare.

A questo punto se ci si pone nella teoria del I ordine, in cui si assume valida l'ipotesi di piccoli spostamenti da un punto di vista geometrico è lecito porre $\cos \varphi \approx 1$. In tali ipotesi o

imponendo l'equilibrio nella configurazione deformata o indeformata otteniamo la medesima relazione lineare tra carichi e spostamenti con errori percentuali al massimo lo 0.5% con $f/l = 1/10$ (freccia non piccola rispetto alla lunghezza):

$$Pt \cdot l = W \cdot \varphi$$

Le cose cambiano radicalmente se consideriamo oltre la forza trasversale Pt una forza assiale P (fig.1b). Imponendo nuovamente l'equilibrio nella configurazione deformata abbiamo:

$$Pt \cdot l \cos \varphi + P \cdot l \cdot \sin \varphi = W \cdot \varphi$$

Ipotizzando piccoli spostamenti (geometricamente) si possono fare le seguenti approssimazioni $\cos \varphi \cong 1$ e $\sin \varphi \cong \varphi$ il legame tra carichi e spostamenti risulta essere:

$$Pt \cdot l + P \cdot l \cdot \varphi = W \cdot \varphi$$

Si fa osservare come tale relazione di equilibrio è non lineare.

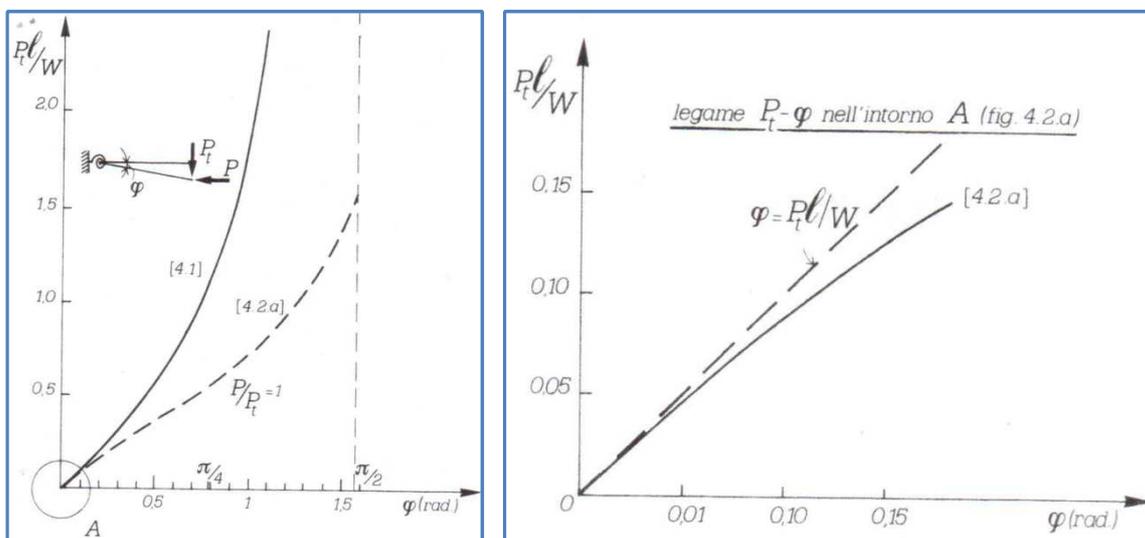


Fig.2 : Risposta strutturale dell'asta soggetta a carico assiale e trasversale (Da Pozzati.P – 1987)

Nella fig.2a sono messe a confronto le curve di equazione [4.1] e [4.2a] per un rapporto $P/Pt=1.0$, mentre nella fig.2b è rappresentata la [4.2.a] e [4.2b] nell'intorno dell'origine A. Dalle figure di cui sopra si può trarre l'importante osservazione che nel caso sia presente una forza assiale P , può essere non lecito scrivere l'equilibrio nella configurazione indeformata anche se gli spostamenti sono piccoli dal punto di vista geometrico, quindi l'ipotesi di trascurare piccoli movimenti non è legato alla loro entità ma bensì alla natura della condizione di carico.

Per introdurre il concetto di instabilità per carico critico e prima biforcazione occorre considerare sempre l'asta dell'esempio precedente ma caricata solamente da P . L'equilibrio nella configurazione indeformata con l'asta perfettamente rettilinea e trascurando la resistenza della sezione è sempre di equilibrio qualunque sia il valore di P , $\varphi=0$ (soluzione banale). A partire da tale configurazione per un assegnato valore di P spostiamo la

configurazione dell'asta di un angolo φ con l'ipotesi di piccoli spostamenti nel senso chiarito, l'equazione di equilibrio diventa

$$P \cdot l = W$$

E' evidente che l'equilibrio sarà stabile, instabile a seconda che l'asta tenda a ritornare o allontanarsi una volta rimossa la causa. L'equilibrio è stabile se il momento stabilizzante $W \cdot \varphi$ supera il momento ribaltante $P \cdot l \cdot \varphi$, il carico che soddisfa l'equilibrio indifferente con l'asta nella posizione assegnata è pari :

$$P_{cr} = \frac{W}{l}$$

prende il nome di carico critico euleriano. Per tutti i valori $P < P_{cr}$ l'equilibrio è stabile in caso contrario è instabile o indifferente. Se si trascurano i piccoli spostamenti sono possibili altre configurazioni equilibrate $\varphi \neq 0$ diversa da quella banale risolvendo l'equazione non lineare:

$$P \cdot l \cdot \sin \varphi = W \cdot \varphi$$

Osservando la fig.3 possiamo osservare come il punto A indentifichi il punto di biforcazione ed il carico critico della struttura. Tale carico non può essere superato in quando per $P=P_{cr}$ corrispondono spostamenti inaccettabili per qualsiasi struttura nelle ipotesi effettuate. In realtà anticipiamo come nel caso in oggetto rimuovendo l'ipotesi dei piccoli spostamenti la struttura può trovare l'equilibrio in configurazioni adiacenti a quella indeformata a patto di sopportare incrementi di spostamento dove il carico di collasso può superare il valore critico euleriano. Su questo aspetto ci ritorneremo successivamente quando introdurremo il concetto di instabilità post-critica.

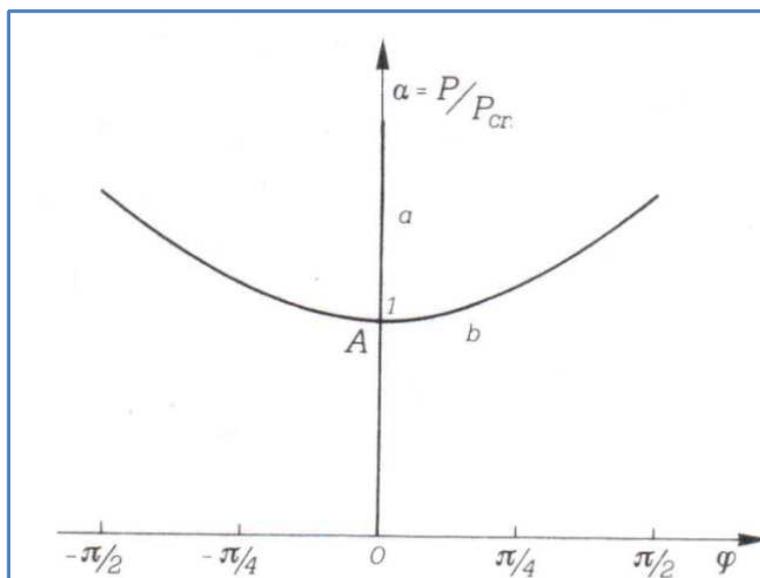


Fig.3 : Comportamento Post- critico dell'asta in oggetto (da Pozzati.P - 1987)

La struttura in oggetto appartiene alle aste perfette o di Eulero a cui corrisponde il carico critico. Un'asta perfetta deve rispettare almeno le seguenti condizioni:

1. ha un comportamento indefinitamente elastico lineare concentrato nella molla rotazionale in fase pre-critica ;
2. è perfettamente rettilinea e quindi sono assenti le imperfezioni strutturali che possono essere di natura statica (carichi trasversali) e geometrica (difetti di verticalità);

Dunque la validità della soluzione ottenuta non tiene conto della non linearità del materiale e dei relativi fenomeni di plasticizzazione delle sezioni (cerniere plastiche) e delle imperfezioni geometriche che tutte le strutture hanno inevitabilmente, quindi è un'asta ideale e non reale.

4. EFFETTO DELLE IMPERFEZIONI

Con riferimento alla fig.4 , vediamo cosa succede se inglobiamo nel modello delle imperfezioni geometriche rappresentate da un difetto di verticalità iniziale misurato dalla rotazione iniziale φ_0 . L'equazione di equilibrio scritta nella configurazione deformata e senza restrizioni sugli spostamenti è la seguente:

$$P \cdot l \cdot \sin(\varphi + \varphi_0) = W \cdot \varphi$$

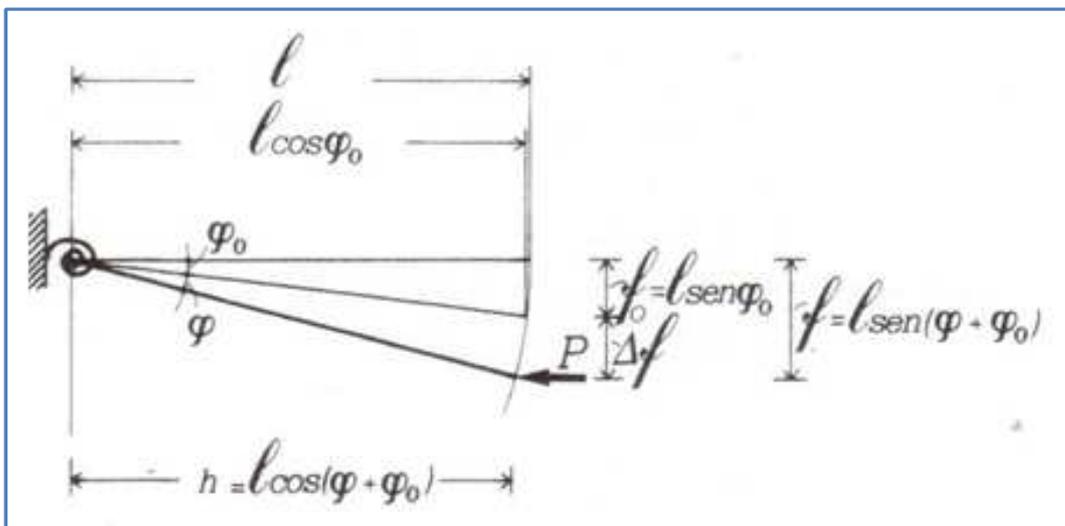


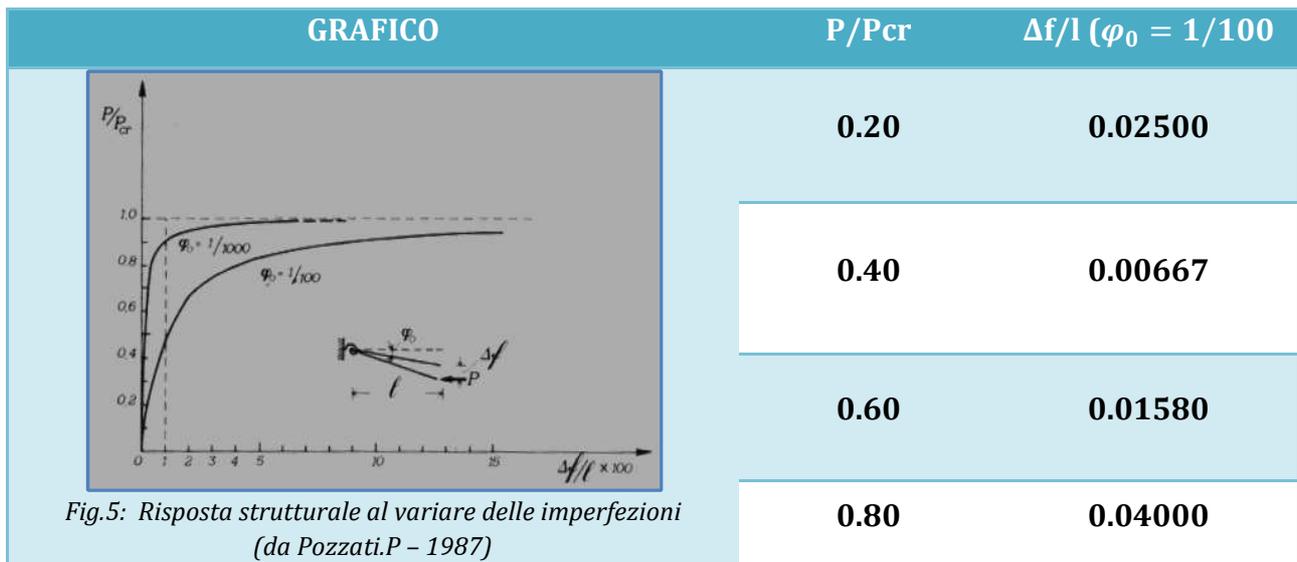
Fig.4: Modello di struttura con imperfezioni geometriche (da Pozzati.P - 1987)

Il carico critico ottenuto nell'ipotesi dei piccoli spostamenti rimane inalterato e non dipende dalla rotazione iniziale e vale :

$$P_{cr} = \frac{W}{l}$$

L'equazione può essere riscritta nella seguente forma:

$$P \cdot \sin(\varphi + \varphi_0) = P_{cr} \cdot \varphi \rightarrow \frac{P}{P_{cr}} = \frac{\varphi}{\sin(\varphi + \varphi_0)}$$



Dal grafico di fig.5 e dai risultati riportati in tabella si possono trarre le seguenti considerazioni :

1. L'applicazione del carico P comporta sempre un incremento di rotazione φ che è tanta più elevata quando ci avviciniamo al carico critico Euleriano P_{cr} ;
2. La presenza delle imperfezioni eliminano i punti di biforcazione ;
3. Il carico critico P_{cr} difficilmente può essere raggiunto, in quanto già con carichi P lontani dal valore critico gli spostamenti diventano molto grandi e inaccettabili per la struttura, questo anche se in via teorica il carico ultimo P_u può risultare superiore a P_{cr} ;
4. All'aumentare dell'imperfezione iniziale φ_0 il carico di collasso si riduce notevolmente e il carico critico può essere raggiunto solo asintoticamente;

5. IL COLLASSO PER INSTABILITÀ - COMPORTAMENTO POSTCRITICO

L'instabilità di sistemi Euleriani avviene per biforcazione dalla configurazione fondamentale. Questa è caratterizzata da piccoli spostamenti e l'approccio del secondo ordine consente sia di calcolarla correttamente che di identificare i valori del carico per cui da essa dipartono configurazioni di equilibrio adiacenti, il più piccolo dei quali è il carico critico.

L'approccio non è però in grado di seguire l'evoluzione dei percorsi diramati, che una struttura reale, inevitabilmente sede di imperfezioni, avvicina in fase post-critica. Esso individua solo la parte del primo ordine degli spostamenti e si limita a stabilire che, comunque piccole siano le imperfezioni, questa diviene illimitata per $P \rightarrow P_E$. Gli spostamenti, di cui la teoria non è in grado di valutare l'entità, non sono allora confondibili con la loro parte del primo ordine.

È questo uno dei motivi per cui il carico P_E viene denominato "critico", assumendo implicitamente che tali spostamenti siano intollerabili. L'informazione è tuttavia troppo generica per permettere di correlare l'effettiva capacità portante della struttura con il carico critico teorico.

Questo può a volte essere raggiunto e anche superato in misura non marginale, al prezzo di spostamenti accettabili quantomeno in situazioni estreme. Di converso, può accadere che il carico critico non possa neppure venire avvicinato, in quanto la curva rappresentativa della risposta della struttura reale raggiunge un punto di massimo sotto valori sensibilmente inferiori. La teoria del secondo ordine non fornisce indicazioni in proposito e deve essere integrata da uno studio del comportamento post-critico della struttura.

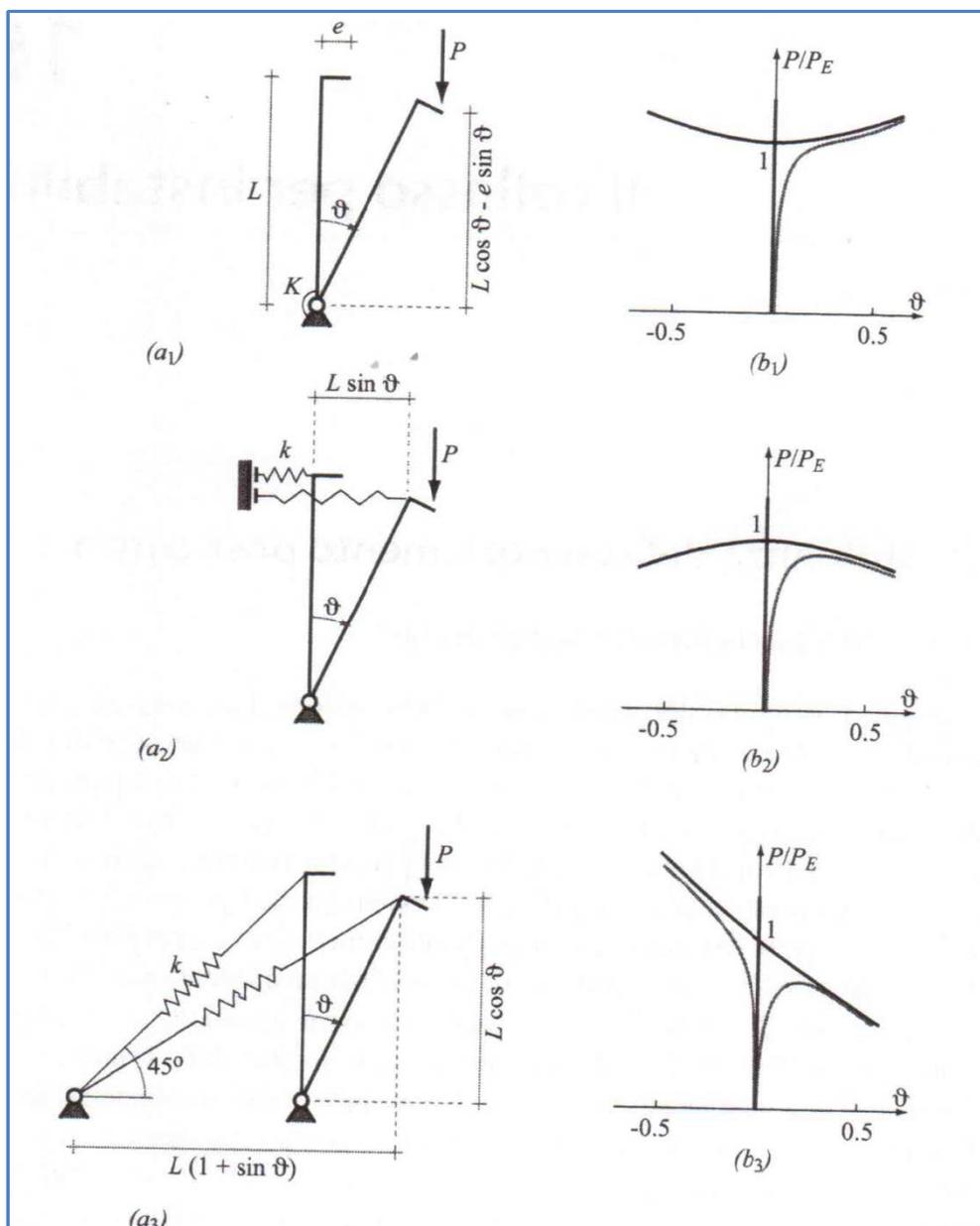


Fig.6: Modelli strutturali per analisi di stabilità post-critica (da Corradi Dell'Acqua – 1993)

Per chiarire queste affermazioni, si considerano i tre sistemi a un grado di libertà Figura 6. Il carico, che si mantiene verticale, presenta un'eccentricità, rappresentativa di una generica imperfezione, misurata dal parametro adimensionale

$$\zeta = \frac{e}{L}$$

I carichi critici delle tre aste risultano, come si constata con semplici calcoli al secondo ordine:

$$P_{Ea} = \frac{K}{L} \quad P_{Eb} = kL \quad P_{Ec} = \frac{1}{2}kL$$

Operando senza ipotesi restrittive sull'entità degli spostamenti, si ottengono per l'E.P.T. dei tre problemi le espressioni :

$$\begin{aligned} V_a(\vartheta) &= \frac{1}{2}k\vartheta^2 - PL(1 - \cos \vartheta + \zeta \sin \vartheta) \\ V_b(\vartheta) &= \frac{1}{2}kL^2 \sin^2 \vartheta - PL(1 - \cos \vartheta + \zeta \sin \vartheta) \\ V_c(\vartheta) &= \frac{1}{2}kL^2(\sqrt{1 + \sin \vartheta} - 1)^2 - PL(1 - \cos \vartheta + \zeta \sin \vartheta) \end{aligned}$$

Le equazioni di equilibrio si scrivono imponendo:

$$dV/d\vartheta = 0.$$

Ricordando le espressioni dei tre carichi critici e risolvendo per P, si ottiene per le aste a, b, c il seguente percorso di equilibrio riportato nelle fig.6b :

$$\begin{aligned} \text{Asta}(a) &= \frac{PL}{K} = \frac{P}{P_{Ea}} = \frac{\vartheta}{\sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta} \\ \text{Asta}(b) &= \frac{P}{kL} = \frac{P}{P_{Eb}} = \frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta} \\ \text{Asta}(c) &= \frac{2P}{kL} = \frac{P}{P_{Ec}} = 2 \frac{\cos \vartheta - \sqrt{1 - \sin \vartheta}}{\sin \vartheta + \zeta \cos \vartheta} \end{aligned}$$

Si supponga che le aste siano perfette. Per $\zeta=0$ le equazioni soprariportate definiscono solo le soluzioni non banali dei problemi.

Le equazioni di equilibrio sono comunque soddisfatte anche da $\theta=0$ e le tre soluzioni sono illustrate a tratto pieno in Figura 6.b. Le biforcazioni si manifestano per $P=P_E$, quando la rigidezza delle molle è stata annullata dagli effetti geometrici. I percorsi diramati evolvono diversamente nei tre casi:

- l'asta (a) presenta una biforcazione simmetrica accompagnata da un recupero di rigidezza, in quanto nelle configurazioni non banali l'equilibrio sussiste sotto carichi crescenti (Figura 6.a);

- pure simmetrico, ma decrescente, è il comportamento post-critico dell'asta (b) (Figura 6.b);
- la biforcazione dell'asta (c) è invece asimmetrica, risultando decrescente per $\theta > 0$ e crescente per rotazioni negative (Figura 6.c).

L'eccentricità del carico elimina le biforcazioni, sospingendo le aste verso uno dei percorsi diramati. Per $\xi=0.02$, le equazioni di equilibrio sono diagrammate nelle curve tratteggiate in figura 6b. I percorsi diramati evolvono nei seguenti modi:

- L'asta (a) può effettivamente raggiungere e in una certa misura superare il carico critico teorico, sia pure al prezzo di rotazioni notevoli.
- L'asta (b) invece collassa sotto il carico corrispondente all'ordinata P_c del punto di massimo della curva, inferiore a P_E .
- La risposta dell'asta (c) dipende dal segno dell'imperfezione; dal momento che questo non è in genere noto a priori, occorre peraltro considerare la situazione più sfavorevole: anche in questo caso il carico critico Euleriano rappresenta quindi solo un valore teorico, che la struttura non può di fatto raggiungere.

6. VALUTAZIONE DELLA CAPACITÀ PORTANTE DI STRUTTURE REALI

Le curve di equilibrio del capitolo precedente governano la risposta elastica di una struttura reale (sede di imperfezioni) nell'intorno della configurazione fondamentale e possono essere utilizzate per valutarne la capacità portante. L'applicazione della teoria di Koiter (teoria asintotica) sul comportamento post-critico iniziale permette di definire il comportamento crescente o decrescente della curva e di scrivere la equazioni di equilibrio nella seguente forma:

$$\mu\zeta = (1 - \mu)\vartheta + \begin{cases} a\vartheta^2 & \text{se } a \neq 0 \\ a\vartheta^3 & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

A questo fine necessario distinguere due tipi di comportamento, che dettano all'analisi due diversi obiettivi.

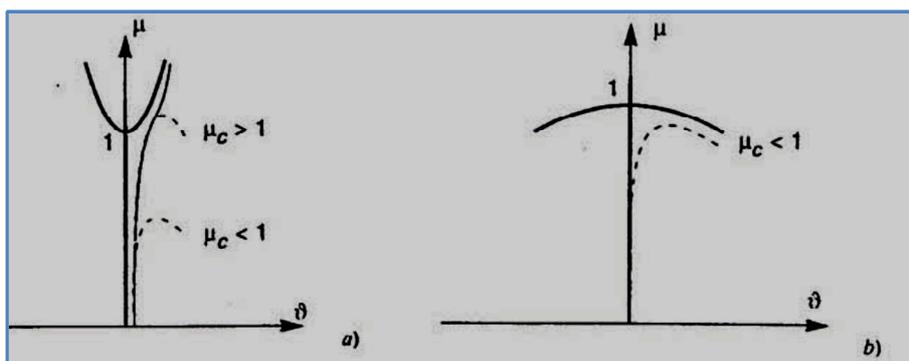


Fig.7: Comportamento post-critico di aste reali sede di imperfezioni (da Corradi Dell'Acqua – 1993)

Se si verifica l'alternativa di biforcazione simmetrica crescente ($a=0$ e $b>0$), la struttura perfetta ha un comportamento post-critico crescente e, per θ sufficientemente elevati, l'equazione di cui sopra prevede $\mu > 1$ indicando che il carico critico teorico può essere in linea di principio superato. Tuttavia l'asta reale ha un comportamento linearmente elastico e nessun materiale si mantiene tale oltre un certo livello deformativo. Anche se la struttura perfetta si comporta ancora elasticamente al raggiungimento del carico critico, avvicinando questo valore piccole imperfezioni causano spostamenti notevoli e le risorse elastiche del materiale si esauriscono. Per stabilire la capacità portante della struttura, occorre per prima cosa valutare fino a quale valore del carico la soluzione elastica si mantiene valida.

Raggiunta questa soglia la risposta cambia per effetto del mutato legame costitutivo e la struttura giunge a collasso sotto un valore del carico μ_c che ne definisce l'effettiva capacità portante (Fig.7a). μ_c può risultare inferiore o superiore a uno, indicando che la struttura può raggiungere la situazione ultima per carichi inferiori al valore critico Euleriano, ma anche superare questo valore. Se la struttura perfetta presenta invece un comportamento post-critico decrescente, la curva rappresentativa della risposta elastica del sistema reale raggiunge un massimo per un valore $\mu_c < 1.0$ (Fig.7b). Si dice allora che il sistema è sensibile alle imperfezioni, in quanto la sua capacità portante, comunque inferiore al carico critico teorico, è tanto più ridotta quanto più queste sono elevate.

Per introdurre lo studio della stabilità di telai elastoplastici commentiamo l'esempio riportato in figura e tratta dalla bibliografia specializzata (Corradi et.al, 1993)

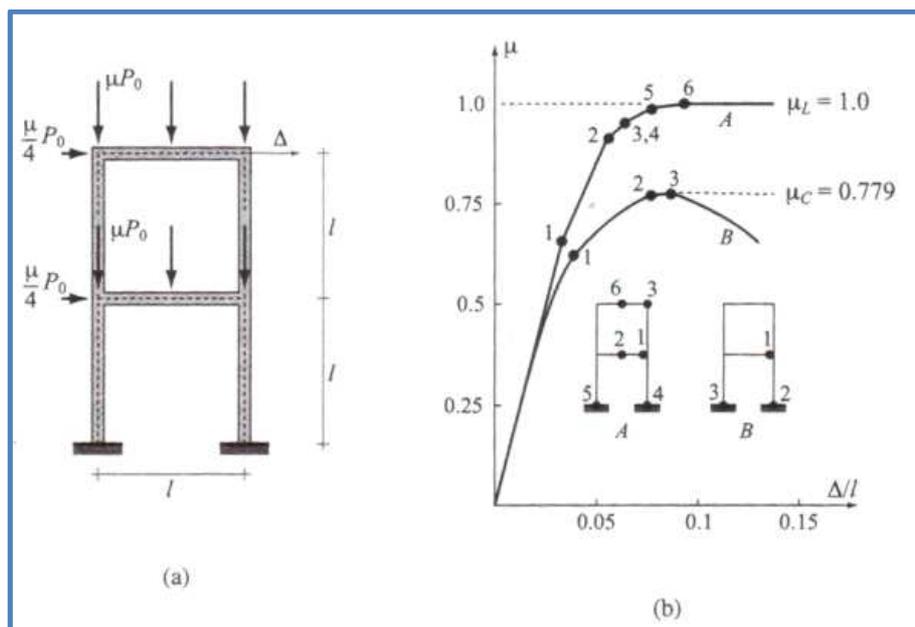


Fig.8: Comportamento post-critico di telai elastoplastici (da Corradi Dell'Acqua - 1993)

Il telaio di fig.8 ha una geometria in cui le membrature hanno tutte la stessa lunghezza e sezione trasversale. La relazione che lega il momento limite o plastico e la rigidezza flessionale dell'asta vale:

$$M_0 = \frac{7}{60} \cdot \frac{EI}{l}$$

Il comportamento della sezione viene schematizzato con un modello di cerniera plastica trascurando l'interazione tra momento flettente e sforzo assiale.

Ognuno delle due travi è soggetta a tre carichi concentrati di uguale valore agenti in corrispondenza dei pilastri e in mezzera, inoltre ai due piano sono applicate due forze orizzontali di intensità pari ad $\frac{1}{4}$ delle precedenti. Il valore di base del carico vale:

$$P_0 = \frac{40}{7} \cdot \frac{M_0}{l}$$

Questa condizione di carico viene amplificata da un fattore moltiplicativo μ , di cui si ricerca il valore che porta il telaio al collasso.

I risultati dell'analisi incrementale elastoplastica in piccoli spostamenti e riportata dalla curva A di fig.8 che lega il moltiplicatore allo spostamento orizzontale in sommità Δ . Alla formazione di ogni cerniera plastica la pendenza del diagramma diminuisce bruscamente, quando il moltiplicatore del carico raggiunge il valore $\mu_L=1.0$ si forma il meccanismo di fig.8 e la struttura esaurisce la capacità portante.

Ripetendo l'analisi elastoplastica rimuovendo gli effetti dei piccoli spostamenti e introducendo la matrice di rigidezza geometrica proporzionale all'azione assiale il cui valore viene aggiornato iterativamente si arriva ad una risposta rappresentata dalla curva B della fig.8, che presenta il punto limite quando si forma la terza cerniera plastica, in corrispondenza del moltiplicatore critico $\mu_{CR}=0.779$.

Dal confronto dei due moltiplicatori si evince che il carico a rottura classico sovrastima il carico di collasso di circa il 30%. Le cerniere plastiche presenti nella situazione ultima non sono tali da attivare un cinematiso e quindi il collasso è dovuto a instabilità della struttura parzialmente plasticizzata.

7. ANALISI DI INSTABILITÀ CON IL METODO AGLI ELEMENTI FINITI

Quando finora riportato è stato fatto riferimento a modelli strutturali semplici per lo più ad un grado di libertà in cui l'elasticità o la non linearità era concentrata in un molla, premesso che le considerazioni sono valide per qualsiasi sistema strutturale composto da elementi monodimensionale, il passo successivo è quello di capire come introdurre in un metodo di discretizzazione generale quale il FEM (Finite Element Method) la non linearità geometrica e quelle meccaniche che sono alla base delle analisi di stabilità euleriana e post-critica. Per fare ciò cerchiamo di capire quali sono i contributi che formano la non linearità geometrica. Gli effetti che comportano non linearità geometrica sono:

- Effetti del secondo ordine (P- Δ) di tipo globale;
- Effetti del secondo ordine (P- δ) di tipo locale o trave-colonna;
- Grandi spostamenti e/o rotazioni;

NON LINEARITÀ GEOMETRICA → EFFETTI DEL SECONDO ORDINE P- Δ

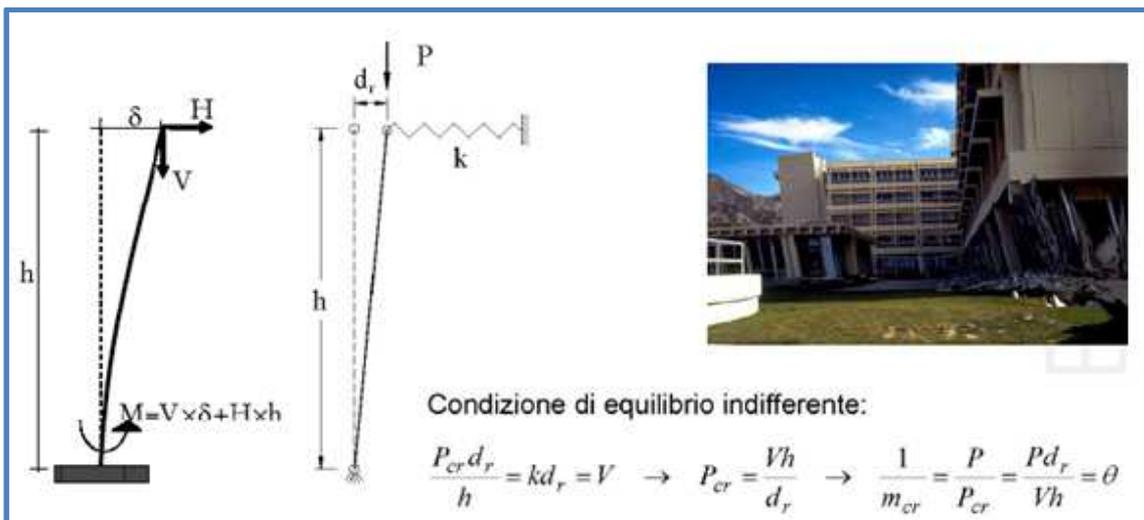


Fig.9: Effetti del secondo ordine globali - piano sofficato (Autori vari)

In presenza degli effetti (P- Δ) si devono rispettare le seguenti condizioni:

- Non si può confondere la configurazione deformata con quella indeformata
- Variazione degli spostamenti non proporzionale ai carichi
- Si modificano le sollecitazioni
- Sistema di riferimento locale solidale con il corpo

Si registra l'amplificazione del momento a causa degli effetti del secondo ordine.

NON LINEARITÀ GEOMETRICA → EFFETTI DEL SECONDO ORDINE P-δ

L'effetto P-δ è un effetto del secondo ordine locale o trave colonna i cui vi è una forte interazione tra momento flettente e sforzi assiali che sono accoppiati nel cosiddetto sistema locale corotazionale.

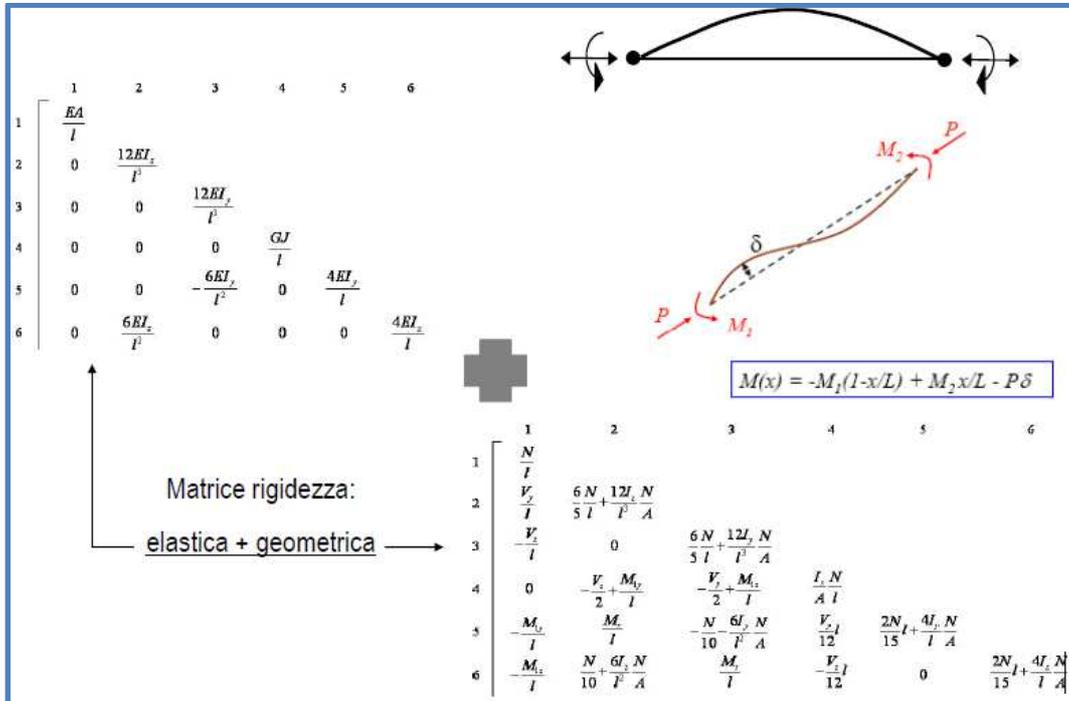


Fig.10: Effetti del secondo ordine locali-interazione M-N (Autori vari)

NON LINEARITÀ GEOMETRICA → GRANDI SPOSTAMENTI E/O ROTAZIONI

In presenza di grandi spostamenti/rotazioni la forza F nel riferimento solidale con la struttura non produce solo azioni flettenti e taglianti ma anche cospicue azioni assiali che contribuiscono a tutte le forme di instabilità.

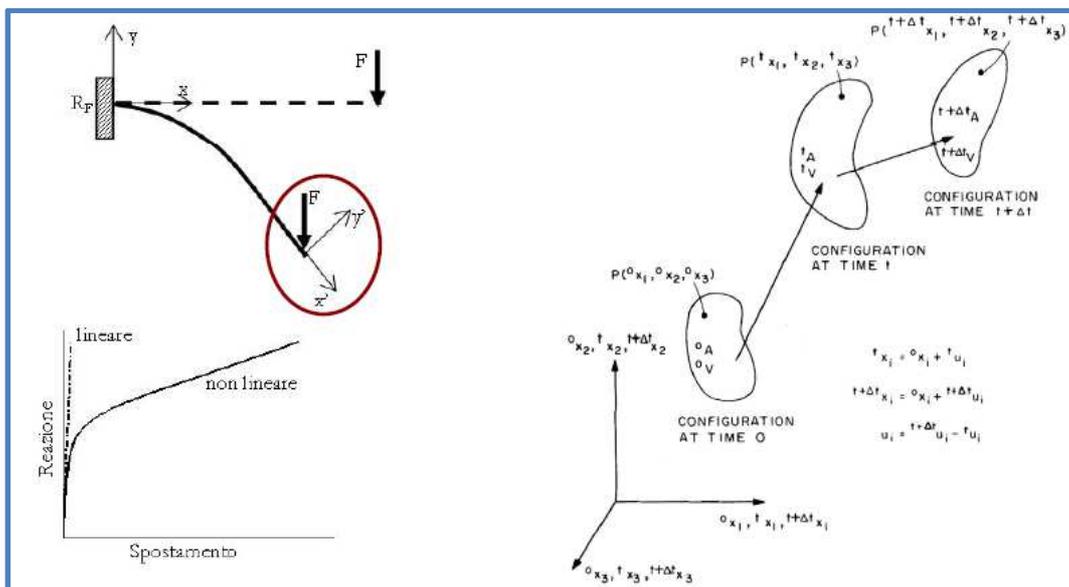


Fig.11: Effetti dei grandi spostamento e rotazioni sulla riposta strutturale (Autori vari)

Arrivati a questo punto per introdurre la non linearità geometrica all'interno di un modello F.E.M bisogna aggiungere le matrici di rigidezza geometriche alla matrice elastica dell'elemento beam-truss utilizzato. La matrice di rigidezza completa in un elemento in grandi spostamenti è :

$$[K_t^e] = [K_E^e] + [K_G^e] + [K_{GS}^e]$$

Dove:

- $[K_t^e]$ è la matrice di rigidezza tangente dell'elemento in assenza di non linearità meccaniche;
- $[K_E^e]$ è la matrice di rigidezza elastica dell'elemento;
- $[K_G^e]$ è la matrice di rigidezza geometrica dell'elemento legata all'influenza dello sforzo assiale sulla rigidezza flessionale (II°Ordine);
- $[K_{GS}^e]$ è la matrice di rigidezza dell'effetto degli spostamenti finiti ossia la matrice dei grandi spostamenti, funzione del metodo utilizzato (Lagrangiano totale, Aggiornato, Corotazionale);

Nel caso in cui sia presente anche la non linearità meccanica tramite modelli globali a cerniere plastiche o fibre concettualmente le matrici saranno elastoplastiche ma la loro determinazione è molto complessa ed esula dallo scopo di questo lavoro. Inoltre dobbiamo dire che la somma delle matrici è algebrica con il segno soprattutto per la matrice geometrica che in presenza di sforzi assiali di compressione è negativa.

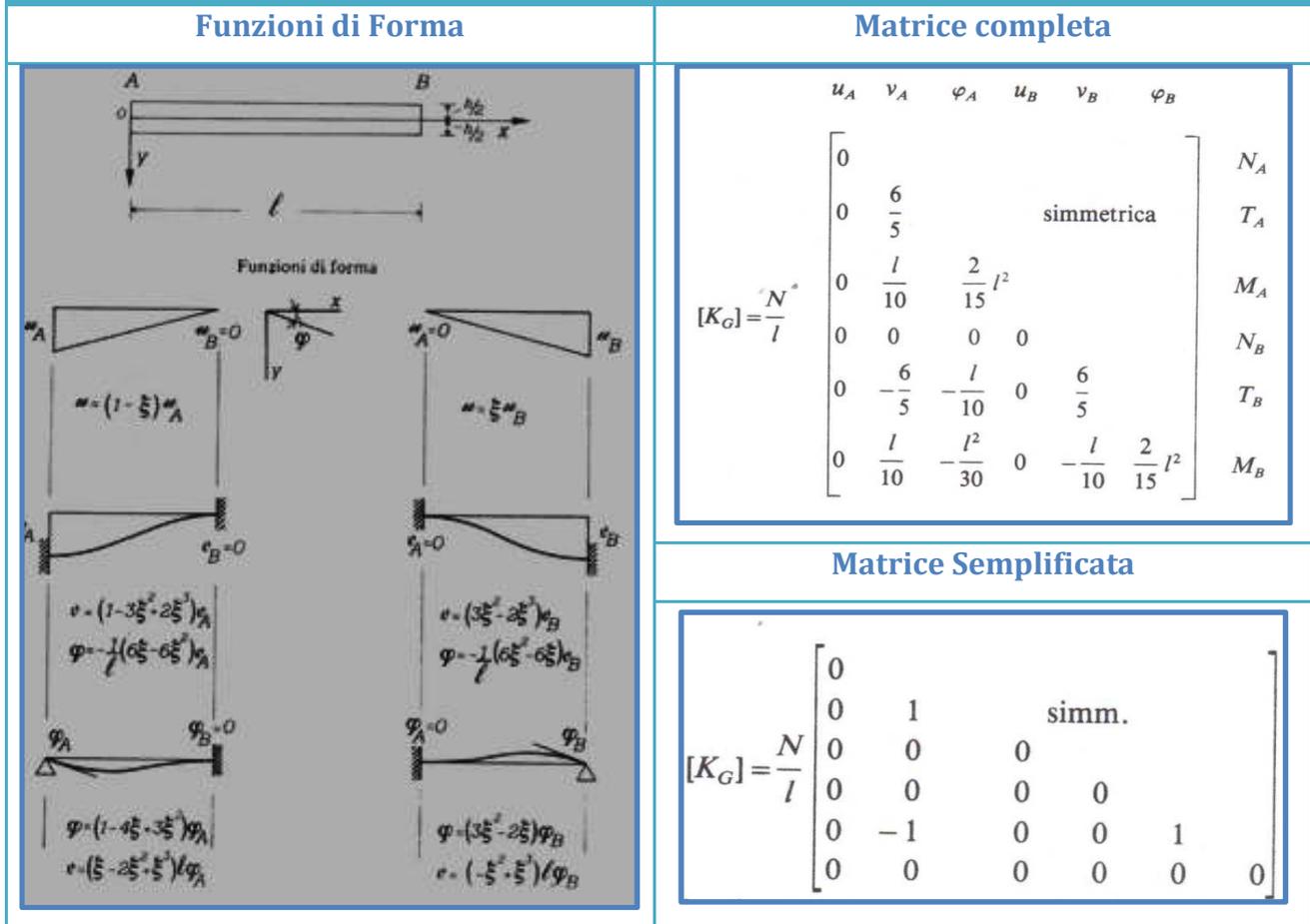
Solo a titolo di esempio si riporta la formulazione della matrice di rigidezza geometrica per la trave pressoinflessa importante anche per il calcolo del carico critico Euleriano con il metodo F.E.M è approccio al secondo ordine.

Sono riportate due matrici che si ottengono dalla minimizzazione dell'Energia di deformazione elastica nell'ipotesi di deformazione troncata al secondo ordine.

La prima matrice completa è simmetrica e dipende dallo sforzo normale e dalla luce dell'elemento come riportata in tabella.

La seconda matrice semplificata si ottiene nelle ipotesi in cui la deformata della trave è rigida ossia con il solo contributo globale legato al drift di piano, $V_B - V_A / l = \text{cost}$, che equivale al metodo di analisi semplificato chiamato P- Δ in cui gli effetti del secondo ordine vengono simulati come incremento delle forze orizzontali dipendenti dal valore dell'angolo θ richiesto anche dalle NTC 2008.

MATRICE DI RIGIDEZZA GEOMETRICA DELLA TRAVE PRESSOINFLESSA



Infine vediamo velocemente come si può determinare il carico critico euleriano con il F.E.M. Consideriamo un'asta caricata all'estremo da un solo carico assiale P e variamente vincolata, l'equilibrio si traduce nella seguente equazione:

$$([K_E] - [K_G]) \cdot [\alpha] = 0$$

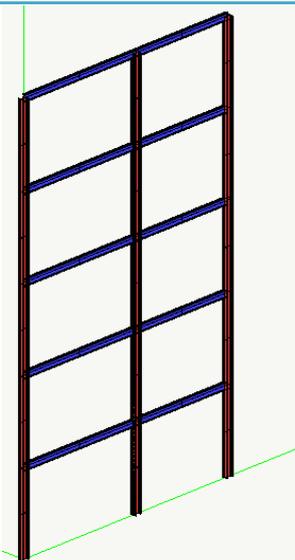
Il termine noto è nullo in quando non sono applicate forze trasversali ai nodi. L'equazione può essere riscritta nella seguente forma:

$$[K_E] - P[K'_G] \cdot [\alpha] = 0$$

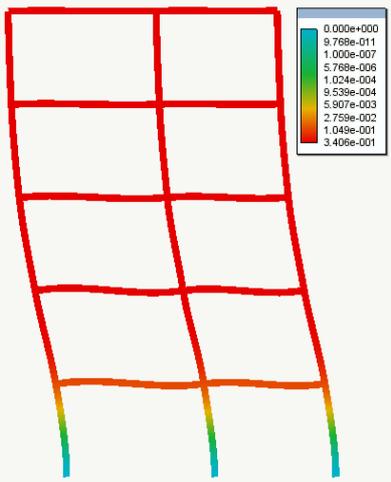
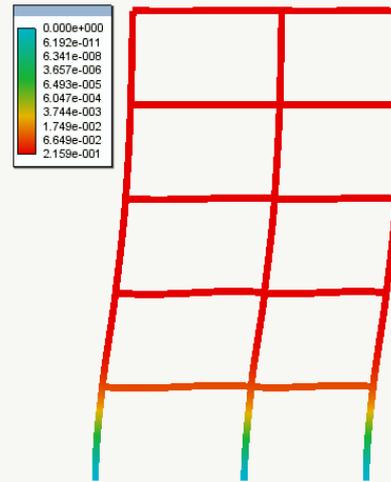
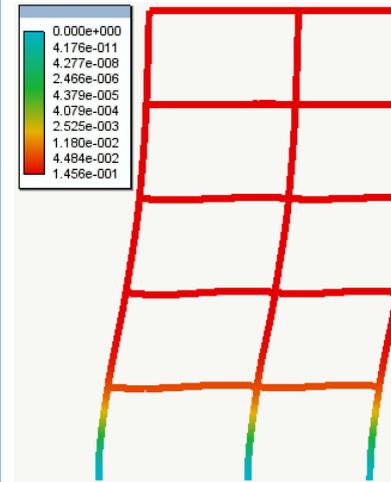
In cui la matrice $[K'_G]$ è calcolata per $P=1$, ed $[\alpha]$ è il vettore degli spostamenti nodali. La soluzione del sistema si ottiene annullando il determinante della matrice sopra riportata, ossia si cerca per quali valori di P il determinante è nullo. Il più piccolo valore di P ottenuto dall'equazione ci dà il carico Critico Euleriano. Questo metodo di analisi agli autovalori in letteratura è chiamato Linear Buckling e permette di determinare i moltiplicatori critici e i relativi modi di instabilità. Il limite di questo metodo rispetto ad un'analisi incrementale è che i carichi assiali nelle aste devono crescere tutti proporzionalmente con lo stesso moltiplicatore, cosa che nella realtà non è quasi mai verificato.

➤ NOLIAN EE - LINEAR BUCKLING

Nell'esempio proposto si analizzano due telai piani in acciaio nei confronti dell'instabilità a pressoflessione, con la teoria del II ordine (linear buckling), di cui il primo a nodi spostabili ed il secondo a nodi fissi. Lo scopo dello studio è l'influenza della mesh sul moltiplicatore o il carico critico euleriano e sul modo di instabilità.

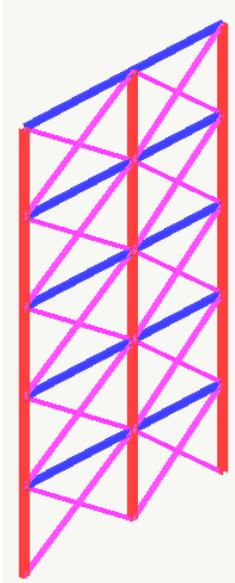
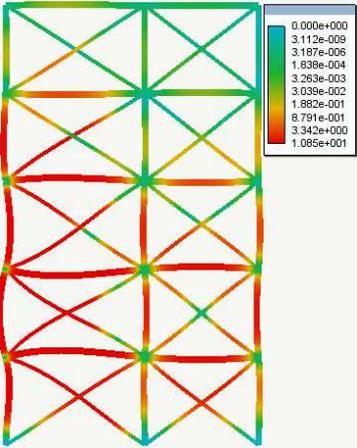
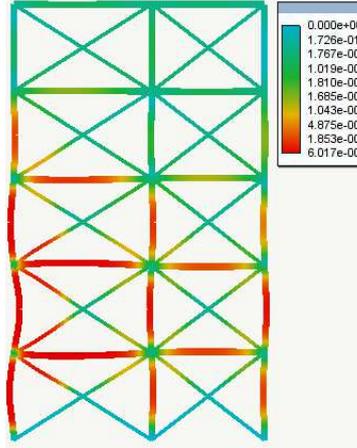
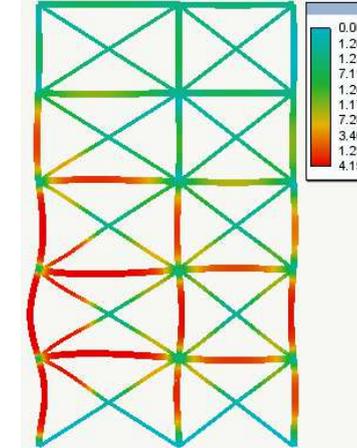
TELAIO PIANO A NODI SPOSTABILI										
TELAIO	GEOMETRIA									
	Campate		Interpiani		Sezioni					
	L ₁	L ₂	N°	H _{PIANO}	Colonne	Travi				
	550	450	5	350	HEB 240	IPE 270				
	Materiale				Vincoli					
	Tipo	C _{MECCANICHE}			Esterni		Interni			
	S275 H	E	G	v	Incastro		continuità			
		2E10 ⁶	8.5E10 ⁵	0.3						
	Carichi Nodali				Imperfezioni					
	Fz	Fx	Fy	Mx	My	Mz	Statiche		Geometriche	
	20000	0	0	0	0	0	No		No	

Nota bene: le grandezze fisiche e geometriche sono in kg e cm.

RISULTATI ANALISI					
Mesh : 1EF	$\lambda_{CRIT}=7.332$	Mesh : 2EF	$\lambda_{CRIT}=7.327$	Mesh : 4EF	$\lambda_{CRIT}=7.326$
					

Passando da una mesh 1EF ossia 25 elementi finiti per il telaio ad una mesh di 50 e 100 EF si osserva che il carico critico euleriano varia da 7.332 a 7.326 ossia dello 0.08 % . Ai fini della determinazione del carico critico non dipende dalla mesh, per quando riguarda il modo

critico, mesh più fitte indicano uno sbandamento nel punto di biforcazione verso destra. Il risultato è la conseguenza che nei telai a nodi spostabili utilizzando elementi finiti hermitiani cubici già con un solo elemento si riesce a cogliere il modo critico nonostante la deformata reale è sinusoidale.

TELAIO PIANO A NODI FISSI										
TELAIO	GEOMETRIA									
	Campate		Interpiani		Sezioni					
	L ₁	L ₂	N°	H _p	Colonne	Travi	Brace			
	550	450	5	350	HEB 240	IPE 270	HEA 200			
	Materiale				Vincoli					
	Tipo	C _{MECCANICHE}			Esterni	Interni	Brace			
	S275 H	E	G	v	Incastro	incastri	cerniere			
		2 E10 ⁶	8.5 E10 ⁵	0.3						
	Carichi Nodali					Imperfezioni				
	F _Z	F _X	F _Y	M _X	M _Y	M _Z	Statiche	Geometriche		
	2 E10 ⁴	0	0	0	0	0	No	No		
Nota bene: le grandezze fisiche e geometriche sono in kg e cm.										
RISULTATI ANALISI										
Mesh : 1EF	$\lambda_{CRIT}=66.296$		Mesh : 2EF	$\lambda_{CRIT}=40.445$		Mesh : 4EF	$\lambda_{CRIT}=39.846$			
										

Risultati mesh-dependent si hanno per i telai a nodi fissi dove partendo da una mesh 1EF ossia 45 elementi finiti per il telaio ad una mesh di 70e 120 EF si osserva che il carico critico euleriano varia da 66.296 a 39.846 ossia dello **66.38 %** . Tale risultato era d'attendersi per i telai a nodi fissi limitati negli spostamenti trasversali e dove un EF cubico non può mai

approssimare la forma d'instabilità sinusoidale, mentre con più elementi cubici ad esempio 4 EF si riesce con buona affidabilità a seguire il modo d'instabilità. Si fa notare che le diagonali di controvento sono state vincolate a instabilizzarsi nel piano del telaio altrimenti il meccanismo d'instabilità riguardava queste ultime fuori piano con moltiplicatori critici molto bassi. Infine lo stesso telaio ma controventato presenta nel caso in esame un carico critico pari a circa 5 volte il telaio a nodi spostabili. Nella fig.9 si mostra l'instabilità locale di una diagonale di controvento fuori piano a cui corrisponde un carico critico di 4.213 con riduzione di 1/10 rispetto all'instabilità globale nel piano.

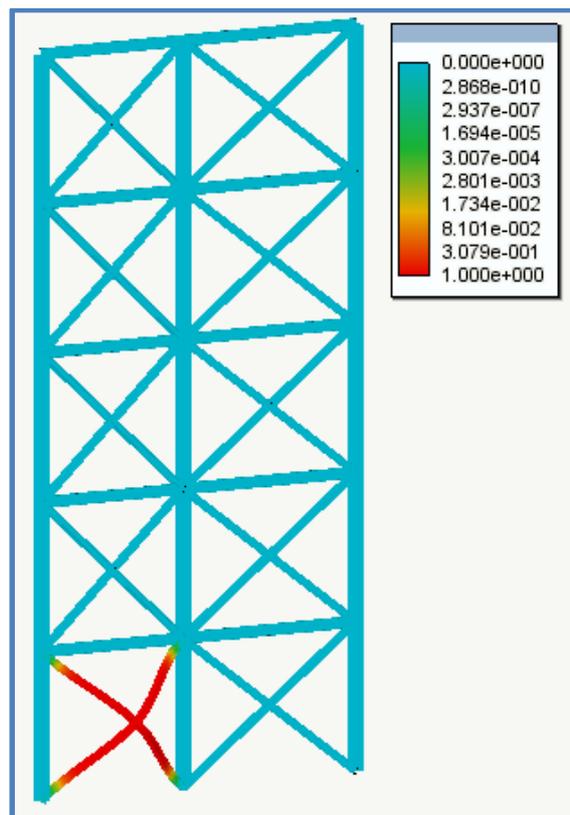


Fig.9: Instabilità fuori piano controvento - $\lambda_{CRIT}=4.213$

➤ NOLIAN EE – NON LINEAR BUCKLING

In questo esempio tratteremo il problema dell'instabilità dei telai in acciaio con un approccio di analisi e verifica molto avanzata e che ci permetterà di determinare il carico di collasso della struttura rimuovendo le due ipotesi fondamentali dall'asta di Eulero, ossia la non linearità del materiale e le imperfezioni strutturali. Tutto questo sarà possibile con l'ambiente EE di Nòlian All-In-One che mette ad disposizione specifici elementi finiti e metodi di analisi non lineare per lo studio post – critico della struttura. Le analisi sono del tipo elastoplastiche in grandi spostamenti. Le opzioni utilizzate di EE saranno dunque:

Elementi beam non lineari con:

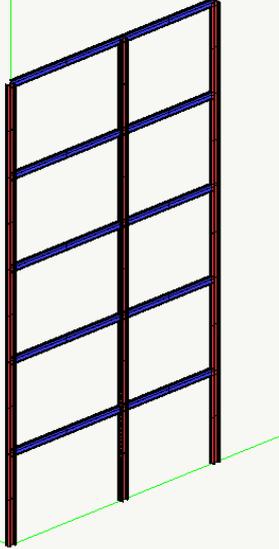
- non linearità meccanica tramite elementi a fibre con formulazione alle Forze (Force Based Element) tramite l'utilizzo di funzioni di forma per le forze e matrice di flessibilità ;
- non linearità geometriche con formulazione in grandi spostamenti, effetti P- Δ globali e P- δ locali (interazione azione assiale e flettente), tramite una formulazione corotazionale (Crisfield, 1991) ;
- Metodi di analisi non lineare:
 - Analisi statiche incrementali iterative al passo con iteratori Newton-Raphson standard e modificato, ottimizzazione della soluzione tramite la line-Search, incremento delle azioni in controllo di Forza, di Spostamento o miste tipo Arch-Length, con test di convergenza iterativa basato sull'equilibrio, sugli spostamenti e sull'energia;
 - Tecniche delle matrici sparse simmetriche e non simmetriche.

Gli esempi trattati sul telaio oggetto di studio saranno:

1. Influenza delle imperfezioni geometriche sul carico di collasso e confronti con il carico critico di Eulero;
2. Influenza della non linearità meccanica sul carico di collasso e confronto con il carico critico di Eulero e in presenza di imperfezioni;
3. Influenza degli effetti del secondo ordine sulla capacità portante della struttura soggetta a carichi orizzontali.

Si metterà in risalto un fenomeno già noto in letteratura quello dell'interazione tra la stabilità e la plasticità nel senso che il comportamento non lineare comporta un deterioramento del carico critico, viceversa gli effetti geometrici o del secondo ordine riducono in maniera sostanziale la resistenza e la duttilità alle azioni orizzontali (tipo sismica) delle strutture.

TELAIO - INFLUENZA DELLE IMPERFEZIONI

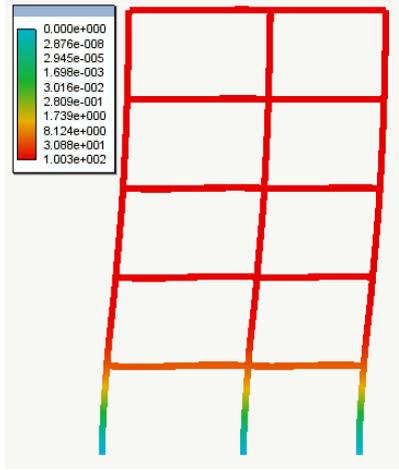
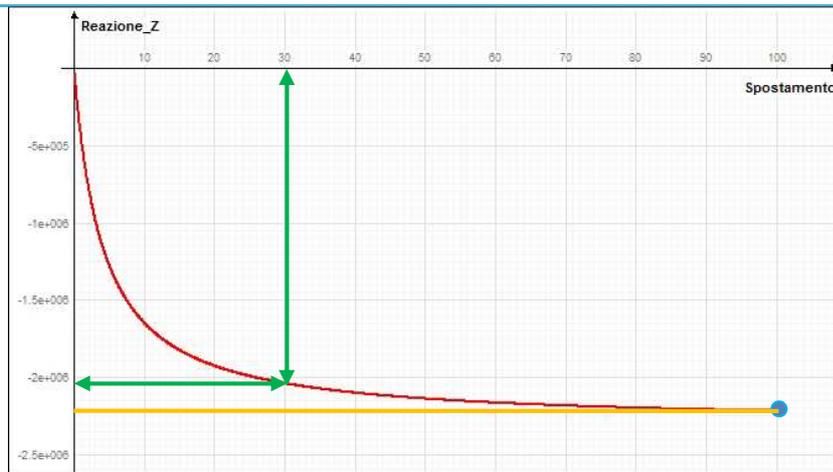
TELAIO	GEOMETRIA							
	Campate		Interpiani		Sezioni			
	L₁	L₂	N°	H_{PIANO}	Colonne	Travi		
	550	450	5	350	HEB 240	IPE 270		
	Materiale			Vincoli				
	Tipo	C_{MECCANICHE}			Esterni	Interni		
	S275 H	E	G	ν	Incastro	continuità		
		2E10 ⁶	8.5E10 ⁵	0.3				
	Carichi Nodali			Imperfezioni				
	F_z	F_x	F_y	M_x	M_y	M_z	Statiche	Geometriche
	20000	0	0	0	0	0	No	Si

Nota bene: le grandezze fisiche e geometriche sono in kg e cm.

RISULTATI ANALISI

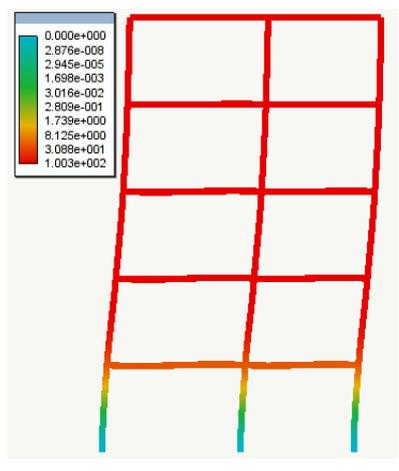
Curva di Equilibrio N-Δ → Δ/h=1/350

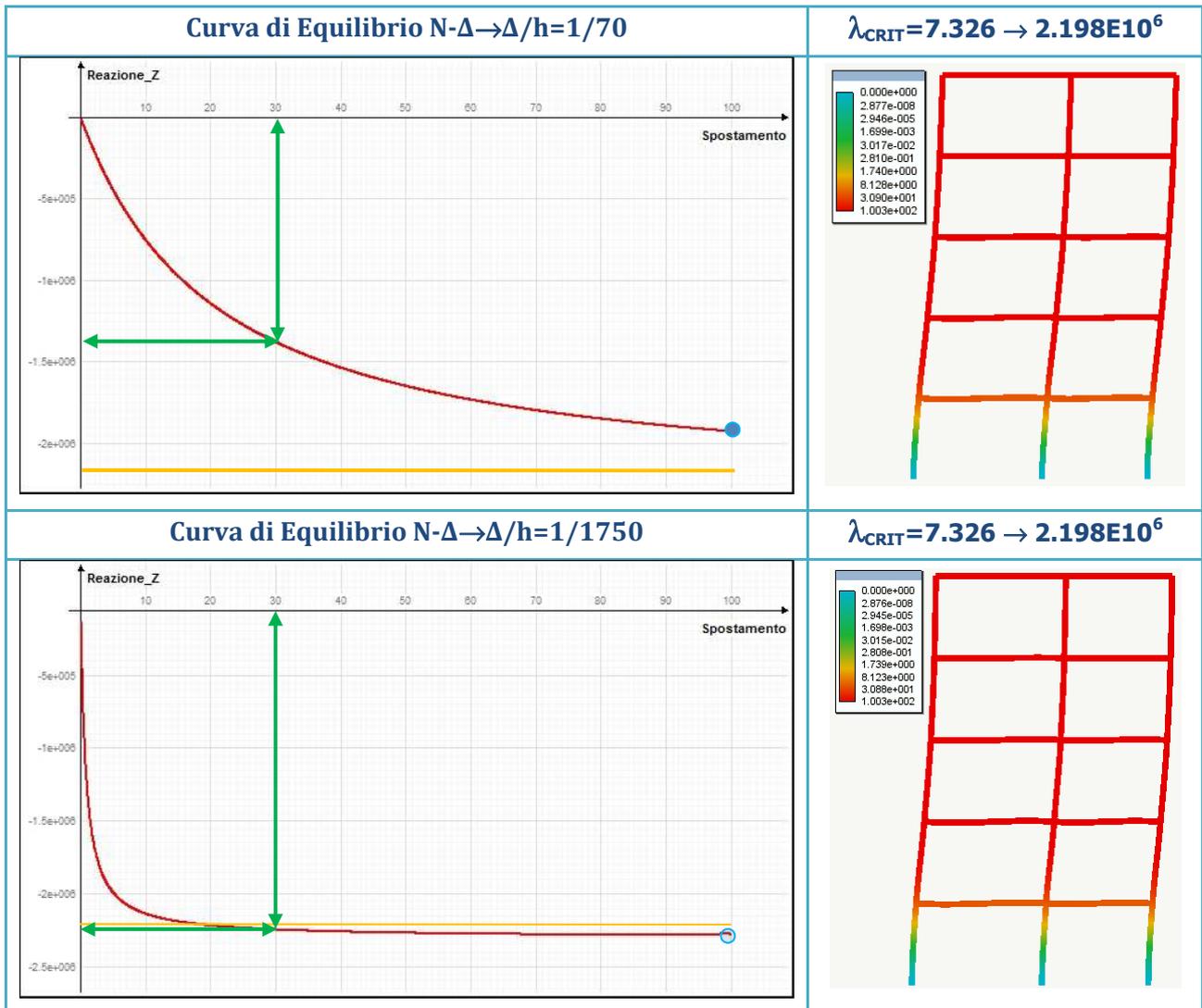
λ_{CRIT}=7.326 → 2.198E10⁶



Curva di Equilibrio N-Δ → Δ/h=1/175

λ_{CRIT}=7.326 → 2.198E10⁶

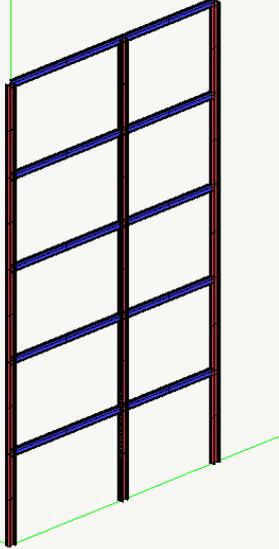




Da questa prima analisi di sensitività del telaio alle imperfezioni geometriche pari ad uno spostamento $\Delta=1.0-2.0-5.0$ cm emerge quanto segue

1. La presenza delle imperfezioni permette di raggiungere il carico limite euleriano asintoticamente e a prezzo di spostamenti non accettabili per le strutture reali e questo è vero quando più elevate sono:
2. Con imperfezioni limitate <0.2 cm la curva di equilibrio tende più rapidamente al carico critico euleriano e può già a spostamenti >20 cm in testa anche superarlo, nel caso in oggetto $\lambda_{COLLASSO}=2.27E10^6$;
3. Per spostamenti orizzontali in testa al telaio di 30 cm, il carico di servizio si riduce notevolmente da $2.05E10^6 \rightarrow 1.80E10^6 \rightarrow 1.37E10^6$, ossia del 50 %.

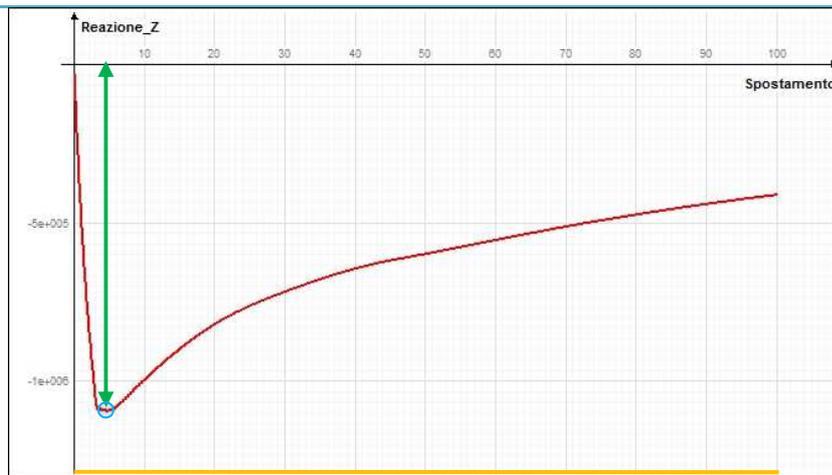
TELAIO - INFLUENZA DI ENTRAMBE LE NON LINEARITA

TELAIO	GEOMETRIA						
	Campate		Interpiani		Sezioni		
	L_1	L_2	N°	H_{PIANO}	Colonne	Travi	
	550	450	5	350	HEB 240	IPE 270	
	Materiale			Vincoli			
	Tipo	$C_{MECCANICHE}$			Esterni	Interni	
	S275 H	E	G	ν	Incastro	continuità	
$2E10^6$		$8.5E10^5$	0.3				
Carichi Nodali			Imperfezioni				
Fz	Fx	Fy	M_x	M_y	M_z	Statiche	Geometriche
20000	0	0	0	0	0	No	Si

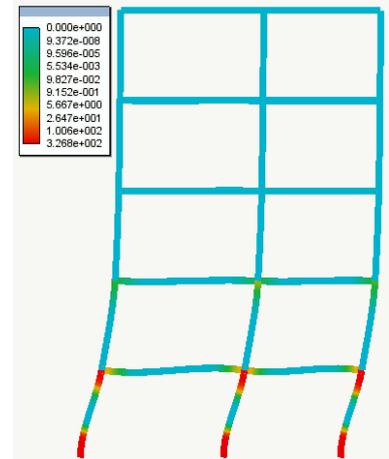
Nota bene: le grandezze fisiche e geometriche sono in kg e cm.

RISULTATI ANALISI - $\lambda_{CRIT}=7.326 \rightarrow 2.198E10^6$

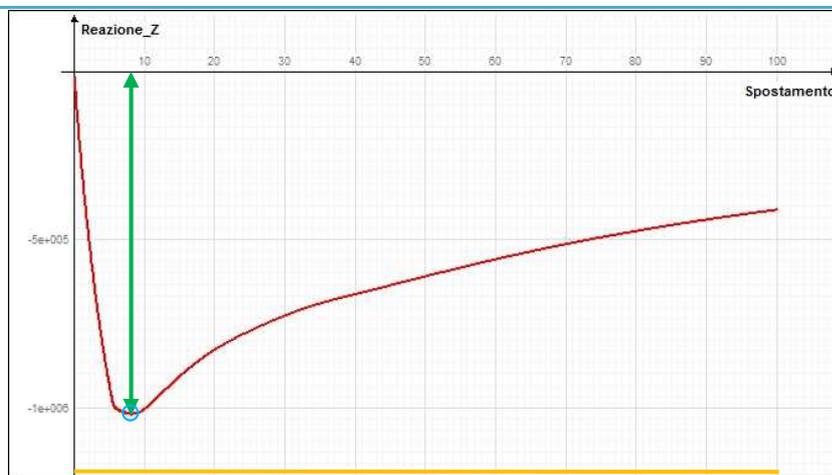
Curva di Equilibrio N- $\Delta \rightarrow \Delta/h=1/350 - \lambda_{COLLASSO}=1.10E10^6$



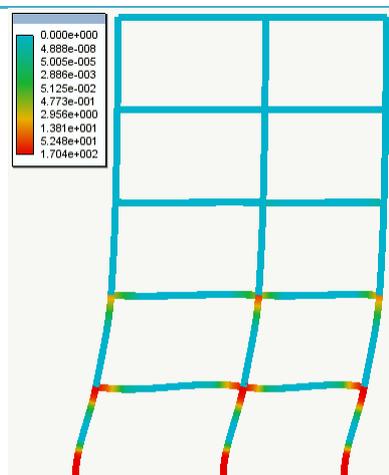
Stato Plastico - Cerniere

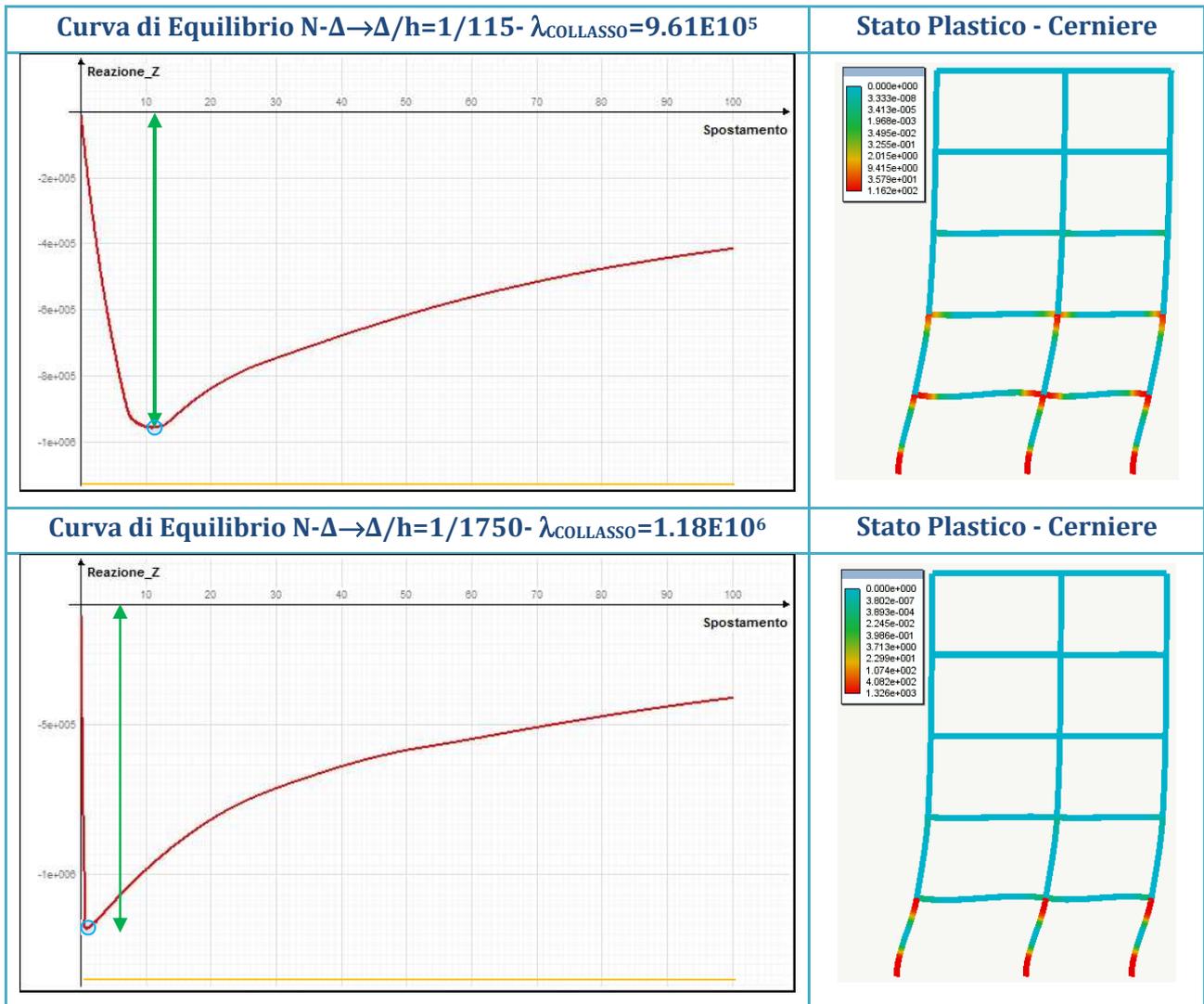


Curva di Equilibrio N- $\Delta \rightarrow \Delta/h=1/175 - \lambda_{COLLASSO}=1.02E10^6$



Stato Plastico - Cerniere

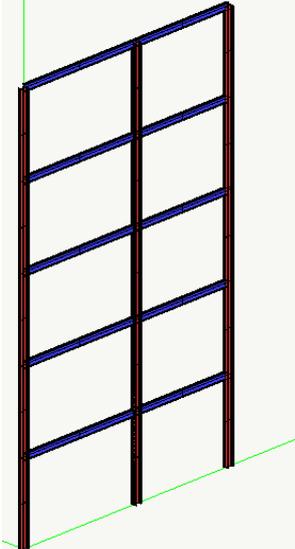




L'analisi parametrica del telaio al variare delle imperfezioni geometriche pari ad uno spostamento in testa al piano $\Delta=1.0-2.0-3.0$ cm ma considerando la non linearità meccanica del materiale tramite un legame elastoplastico incrudente porta alle seguenti considerazioni:

1. Indipendentemente dal valore delle imperfezioni il carico di collasso risulta nettamente inferiore al carico critico di Euleriano anche con materiali a comportamento strain-hardening. Il collasso per instabilità avviene in campo plastico con la formazione di un meccanismo di piano che interessa il primo e parzialmente il secondo livello. La curva di equilibrio presenta un forte softening geometrico;
2. All'aumentare delle imperfezioni geometriche il picco del carico di collasso, il ramo di softening e la resistenza residua della struttura si riducono notevolmente. Il carico critico euleriano non può essere mai raggiunto in quanto il carico di collasso si riduce di $2.05E10^6 \rightarrow 1.18E10^6 \rightarrow 1.10E10^6 \rightarrow 1.02E10^6 \rightarrow 9.61E10^5$, ossia di circa il **115 %**.

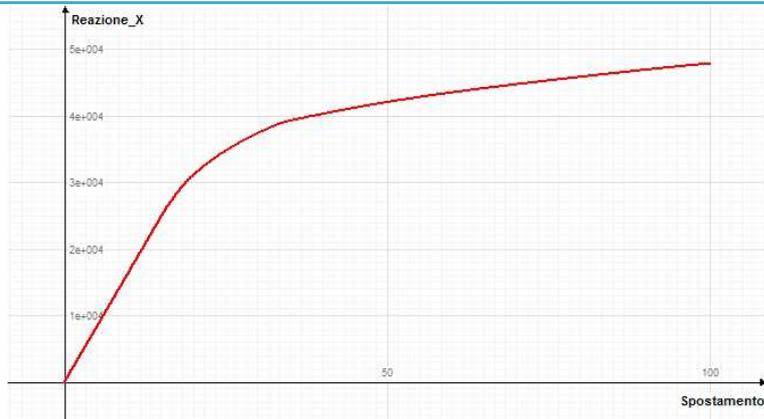
TELAIO - INFLUENZA DEGLI EFFETTI DEL SECONDO ORDINE SULLA RESISTENZA SISMICA E DUTTILITA' STRUTTURALE

TELAIO	GEOMETRIA							
	Campate		Interpiani		Sezioni			
	L₁	L₂	N°	H_{PIANO}	Colonne	Travi		
	550	450	5	350	HEB 240	IPE 270		
	Materiale				Vincoli			
	Tipo	C_{MECCANICHE}			Esterni	Interni		
	S275 H	E	G	v	Incastro		continuità	
		2E10 ⁶	8.5E10 ⁵	0.3				
	Carichi Nodali				Imperfezioni			
	Fz	Fx	Fy	Mx	My	Mz	Statiche	Geometriche
	2E10 ⁴	2E10 ⁴	0	0	0	0	No	Si

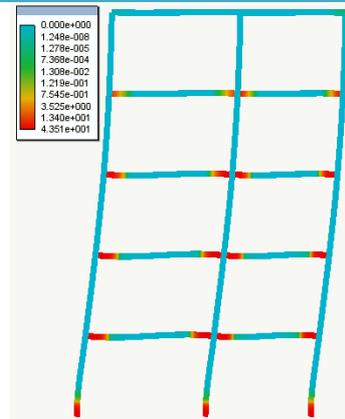
Nota bene: le grandezze fisiche e geometriche sono in kg e cm.

ANALISI ELASTOPLASTICA SENZA P-Δ

Curva Pushover R-Δ → R_{MAX}=47847 , μ>>1.00



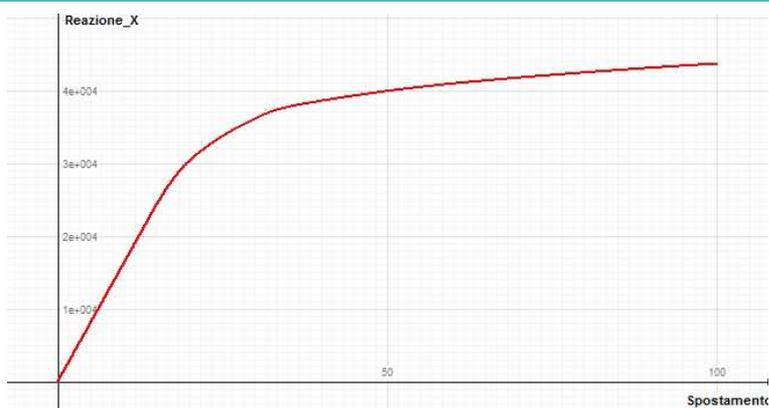
Stato Plastico - Cerniere



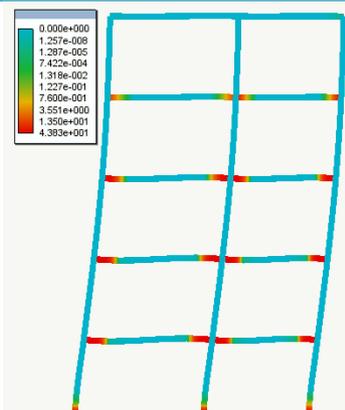
ANALISI ELASTOPLASTICA CON EFFETTI P-Δ

RISULTATI CON P/P_{ESERCIZIO}=0.20

Curva Pushover R-Δ → R_{MAX}=43660 , μ>>1.00

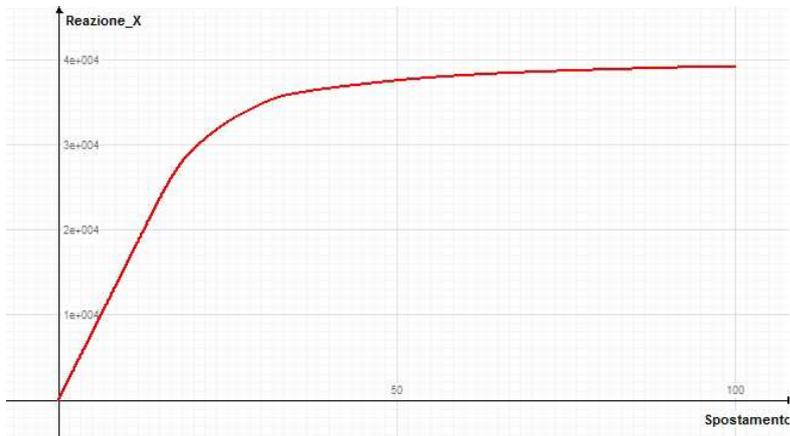


Stato Plastico - Cerniere

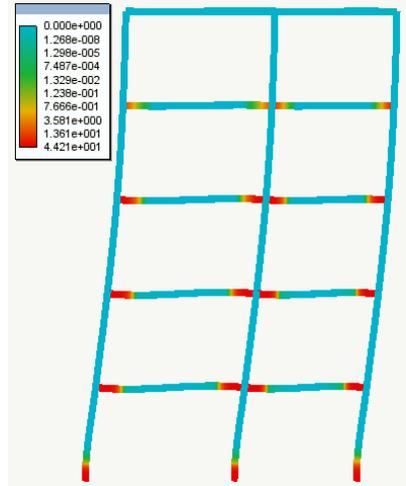


RISULTATI CON $P/P_{ESERCIZIO} = 0.40$

Curva Pushover R- $\Delta \rightarrow R_{MAX}=39247, \mu > 1.00$

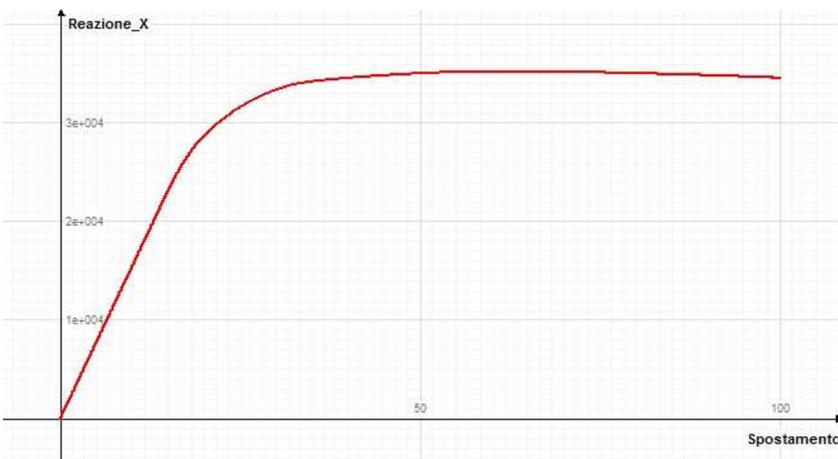


Stato Plastico - Cerniere

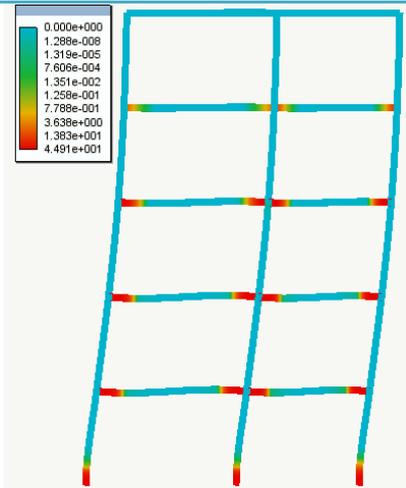


RISULTATI CON $P/P_{ESERCIZIO} = 0.60$

Curva Pushover R- $\Delta \rightarrow R_{MAX}=34577, \mu > 1.00$

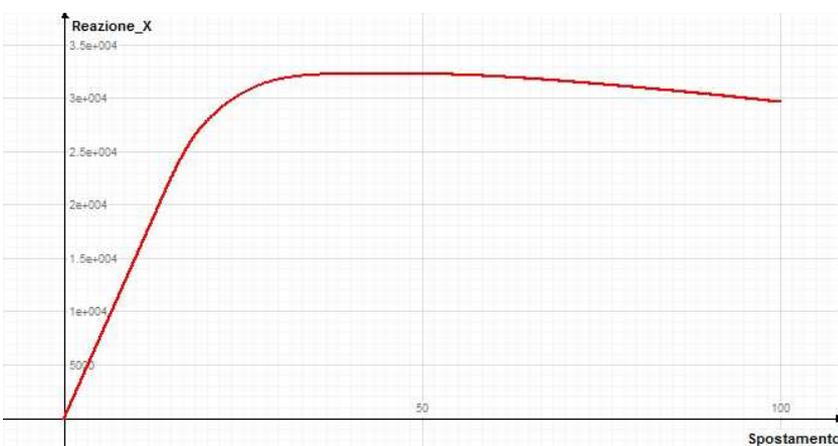


Stato Plastico - Cerniere

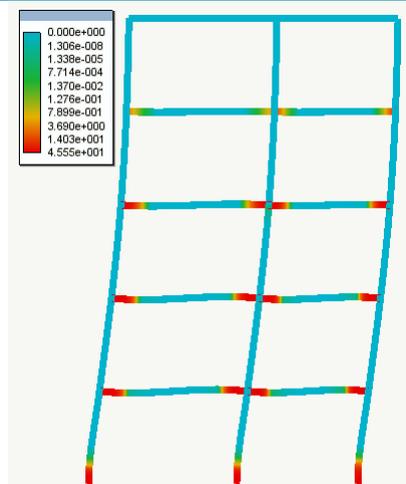


RISULTATI CON $P/P_{ESERCIZIO} = 0.80$

Curva Pushover R- $\Delta \rightarrow R_{MAX}=32337, \mu > 1.00$

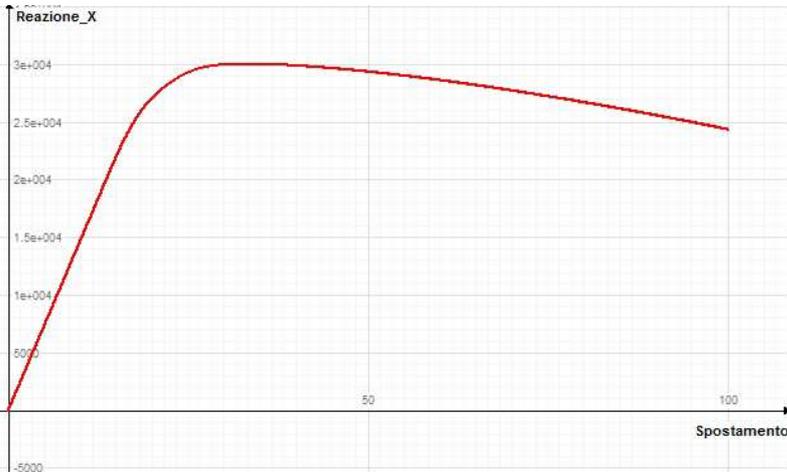


Stato Plastico - Cerniere

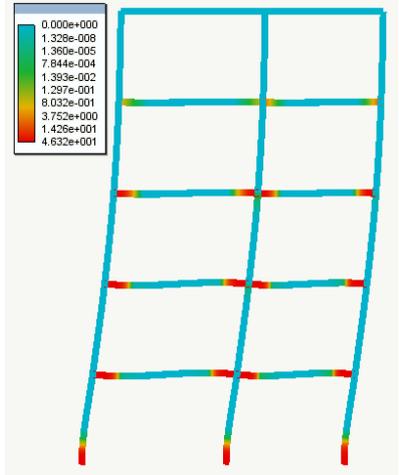


RISULTATI CON P/P_{ESERCIZIO} =1.00

Curva Pushover R-Δ → R_{MAX}=30029, μ≅4.20

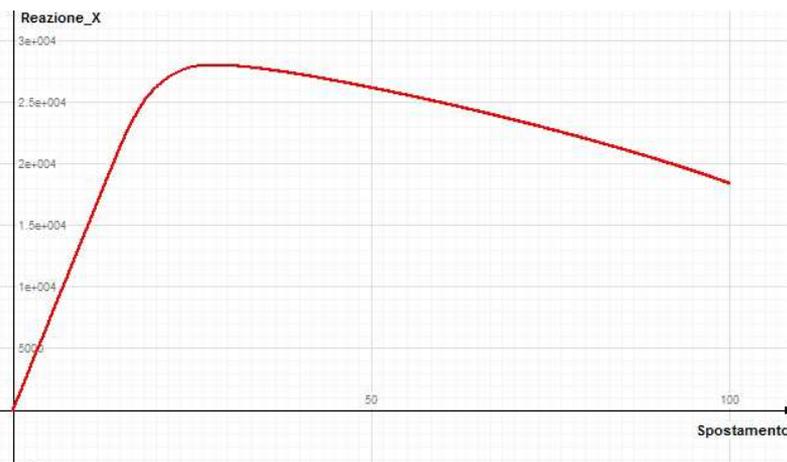


Stato Plastico - Cerniere

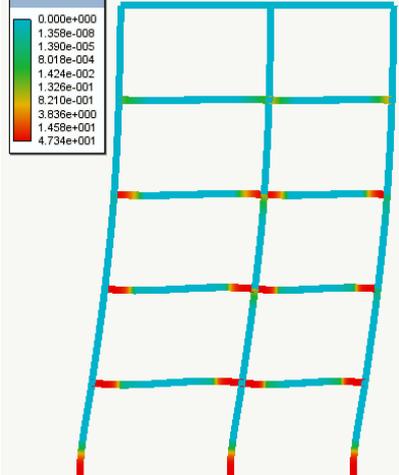


RISULTATI CON P/P_{ESERCIZIO} =1.20

Curva Pushover R-Δ → R_{MAX}=28025, μ≅3.15

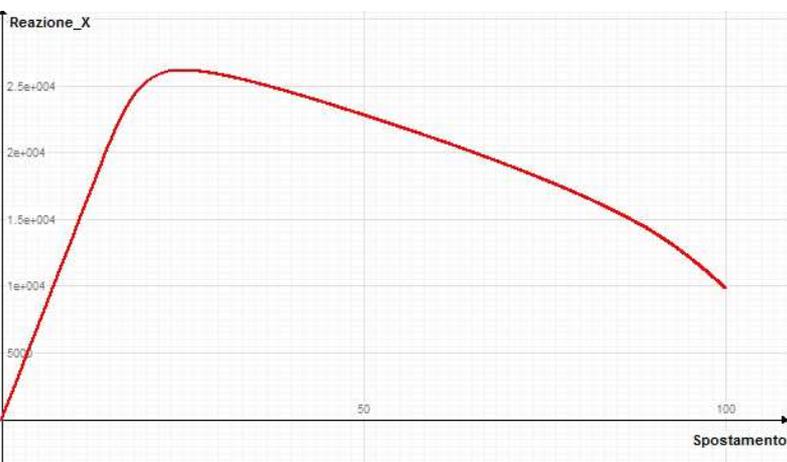


Stato Plastico - Cerniere

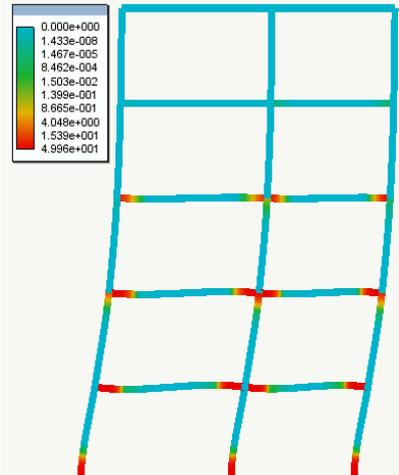


RISULTATI CON P/P_{ESERCIZIO} =1.40

Curva Pushover R-Δ → R_{MAX}=26175, μ≅2.66

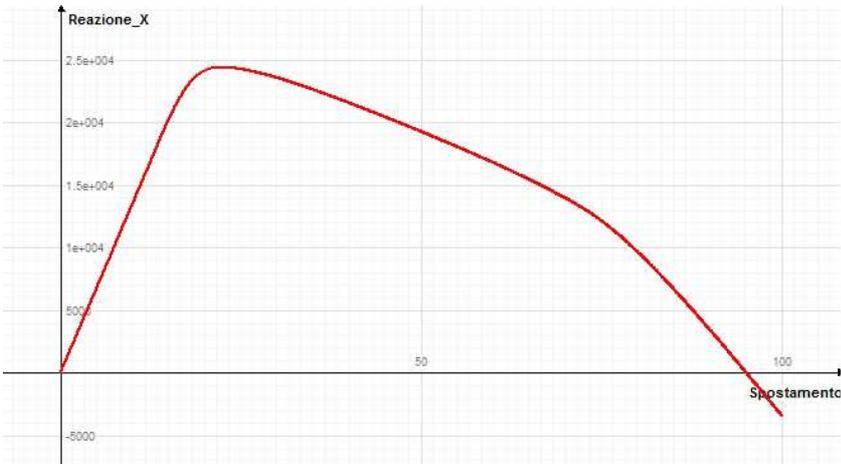


Stato Plastico - Cerniere

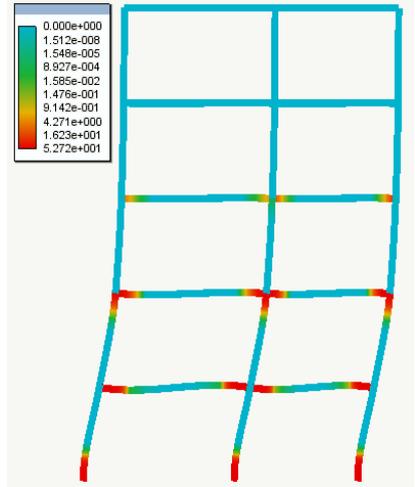


RISULTATI CON P/P_{ESERCIZIO} = 1.60

Curva Pushover R-Δ → R_{MAX}=24424 , μ≅2.37



Stato Plastico - Cerniere

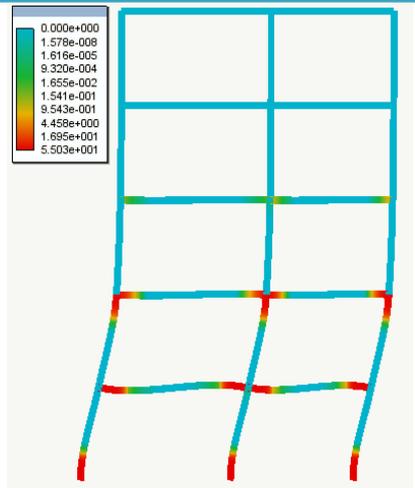


RISULTATI CON P/P_{ESERCIZIO} = 1.80

Curva Pushover R-Δ → R_{MAX}=22737 , μ≅2.20

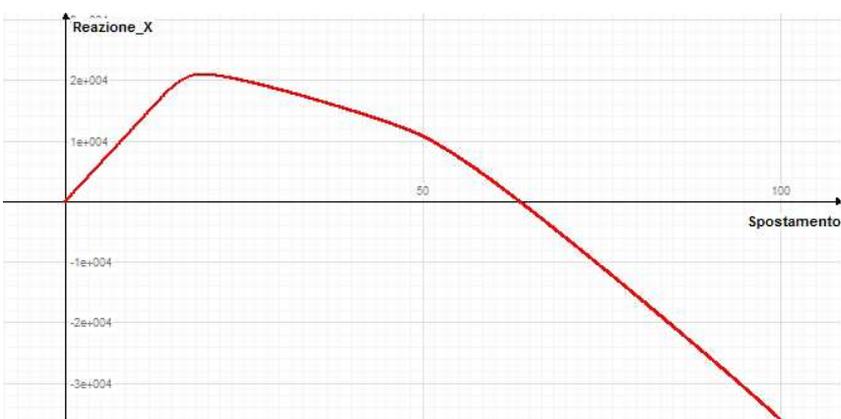


Stato Plastico - Cerniere

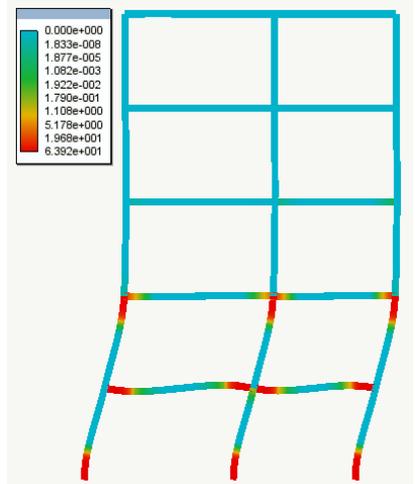


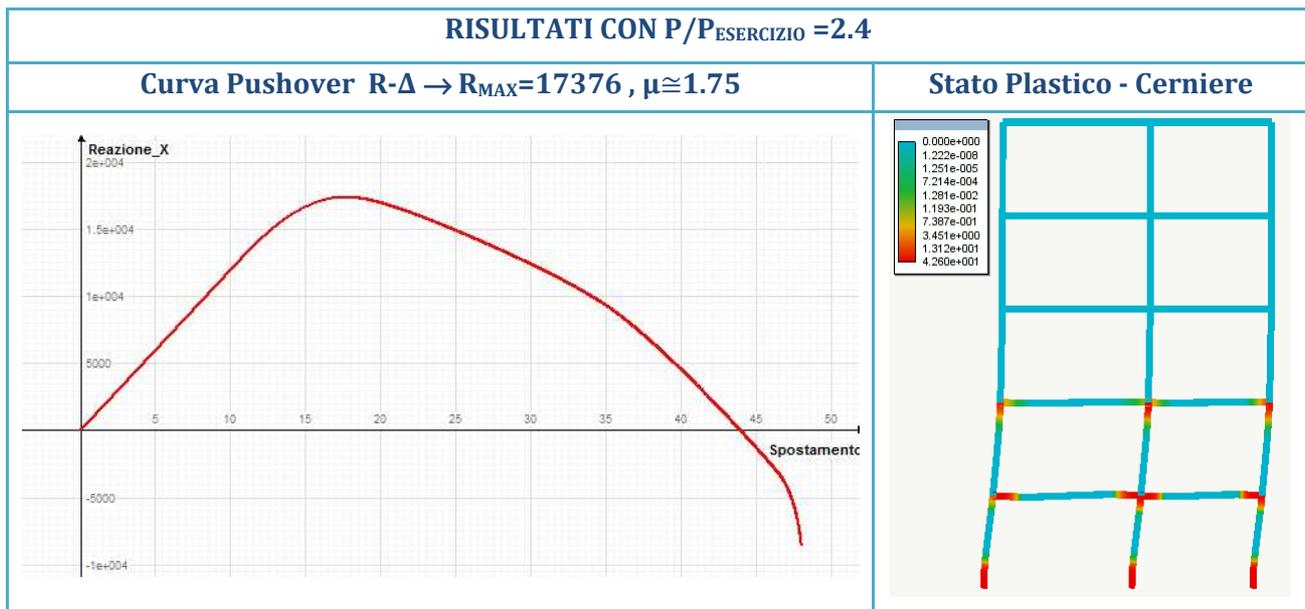
RISULTATI CON P/P_{ESERCIZIO} = 2.0

Curva Pushover R-Δ → R_{MAX}=21033 , μ≅1.90



Stato Plastico - Cerniere





Le analisi pushover effettuate in assenza e presenza di effetti del secondo ordine (P- Δ) con carico assiale esterno variabile (ma costante nella generica analisi), permettono di fare delle importanti osservazioni sulla resistenza sismica e la duttilità strutturale. Ai fini della definizione di quest'ultimi sono state fatte le seguenti considerazioni:

- la resistenza strutturale è identificata dal punto di massimo della curva di capacità;
- la duttilità è definita dal rapporto dello spostamento ultimo e quello al limite elastico o di snervamento. Nel caso in oggetto utilizzando elementi strutturali con classe sezionale I-II per pilastri e travi le quali consentono ampie rotazioni plastiche prima dell'instabilità locale, è stato fissato convenzionalmente lo spostamento della curva di capacità corrispondente al decadimento del 15% della resistenza. Per lo spostamento al limite elastico è stato individuato come fine del tratto lineare.

I risultati a cui si è giunti sono molto significativi e portano alle seguenti considerazioni:

1. Trascurare gli effetti del secondo ordine per strutture snelle comporta una sovrastima sostanziale della resistenza sismica e duttilità strutturale e la formazione di un meccanismo di collasso globale che tiene conto solo della plasticità dei materiali (collasso plastico);
2. Incorporando nelle analisi pushover gli effetti del secondo ordine e se vogliamo i grandi spostamenti possiamo osservare all'aumentare dello sforzo normale come:
 - La resistenza sismica si riduce notevolmente da 47847 kg (assenza P- Δ) a 43660 (con effetti P- Δ e bassi sforzi normali), fino a 17376 kg per sforzi normali pari ad almeno 2.4 i carichi di esercizio. Già con l'applicazione dei carichi di esercizio la resistenza è di 30029. Si registra un decadimento di circa il **45%**.

- La duttilità strutturale globale si riduce progressivamente dal valore massimo di 4.42 fino a **1.75**.
- Il meccanismo di collasso evolve da un **meccanismo globale (dissipativo)** per alti valori della duttilità ad un meccanismo di **piano soffre (fragile)** per basse duttilità che coincide con l'instabilità della struttura.

Quindi possiamo concludere come gli effetti del secondo ordine deteriorano in maniera significativa la resistenza sismica della struttura, la sua capacità dissipativa nonché il meccanismo di collasso che avviene per instabilità o soft-story.

BIBLIOGRAFIA

- Leone Corradi Dell'Acqua (2010) : Meccanica delle Strutture 3 Volume: La valutazione della capacità portante. McGraw-Hill (Milano).
- Piero Pozzati e Claudio Ceccoli (1987) :Teoria e Tecnica delle Strutture – Volume III: Sistemi di Travi – Interpretazione del collasso. UTET.
- Alberto Carpinteri (1998): Analisi non lineare delle Strutture- Pitagora Editrice Bologna
- Daniele Ferretti, Ivo Iori, Marco Morini(2002): La stabilità delle Strutture – Il caso delle Costruzioni in cemento Armato. McGraw-Hill (Milano).
- Nòlian All-in One : Manuale Teorico e Manuale EE (Softing. Srl- Roma);
- Bazant .Z, Cedolin.L (2010): Stability of Structures – Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories. World Scientific (London).
- Stephen P. Timoshenko and James M. Gere –II Edition: Theory of Elastic Stability. Dover Publications Inc. Mineola New York.