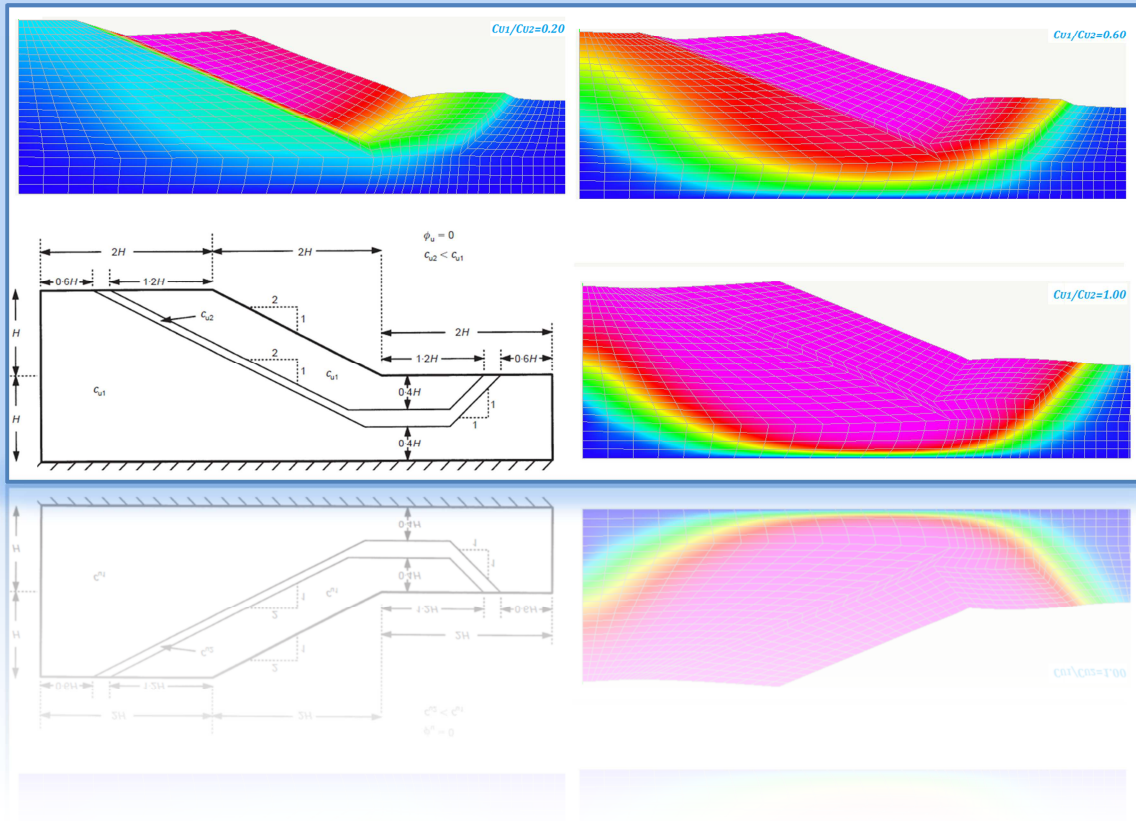


# Analisi FEM non lineare di Sistemi Geotecnici.

## Validazione di Nòlian EE nello studio della stabilità dei pendii

Francesco Oliveto , Ingegnere – utente Nòlian All-In-One – Softing S.r.l

Francesco Canterini, Ingegnere – collaboratore – Softing S.r.l



### 1. SOMMARIO

Nel presente lavoro il campo di applicazione del metodo agli elementi finiti non lineari è in riferimento allo studio di sistemi geotecnici in condizioni di collasso (SLU/V), in particolare sulla stabilità dei pendii naturali e/o artificiali. Saranno testati gli elementi n-dimensionali non lineari di tipo plain-strain (deformazione piana) disponibili nella libreria software EE di Nòlian All in One.

Il documento sarà suddiviso in quattro parti:

1. Cenni sui metodi FEM in geotecnica, con riferimento alle tecniche di soluzione per problemi di rottura, quali il metodo SRF (*c-Phi Reduction/Strenght Reduction*) che si basano sulla riduzione progressiva dei parametri di resistenza fino al raggiungimento delle condizioni di collasso del sistema determinando il Safety Factor del pendio. In alternativa il metodo dello *Stress-Level* o per incremento delle azioni;

2. Validazione delle procedure adottate in Nolian con riferimento a casi di letteratura scientifica di comprovata validità;
3. Cenni sui modelli non lineari dei materiali atti a descrivere il reale comportamento di vari tipi di terreno, con accettabile grado di approssimazione;
4. Cenni sulle procedure di calcolo e di integrazione idonee per la modellazione di problemi geotecnici;

La validazione di Nolian EE permetterà da un lato l'applicazione a problemi geotecnici non consueti e dall'altro lo sviluppo di nuovi modelli costitutivi per la modellazione del terreno anche a problemi di esercizio (SLE).

## 2. METODI FEM NON LINEARI PER PROBLEMI GEOTECNICI

Le analisi geotecniche con i metodi FEM vengono condotte per lo più per determinare il grado di sicurezza di un dato sistema, sia esso un sistema geotecnico, o una paratia, una fondazione, una palificazione, ecc.. In altri casi speciali è richiesta unicamente la determinazione degli spostamenti nella varie parti dell'ammasso di terreno e la resistenza del terreno è irrilevante. Normalmente le analisi a rottura vengono effettuate tramite due tipi di analisi o metodi :

- *il metodo della riduzione dei parametri di resistenza (c-Phi Reduction/SRF);*
- *il metodo con incremento dei carichi applicati (Stress level) ;*

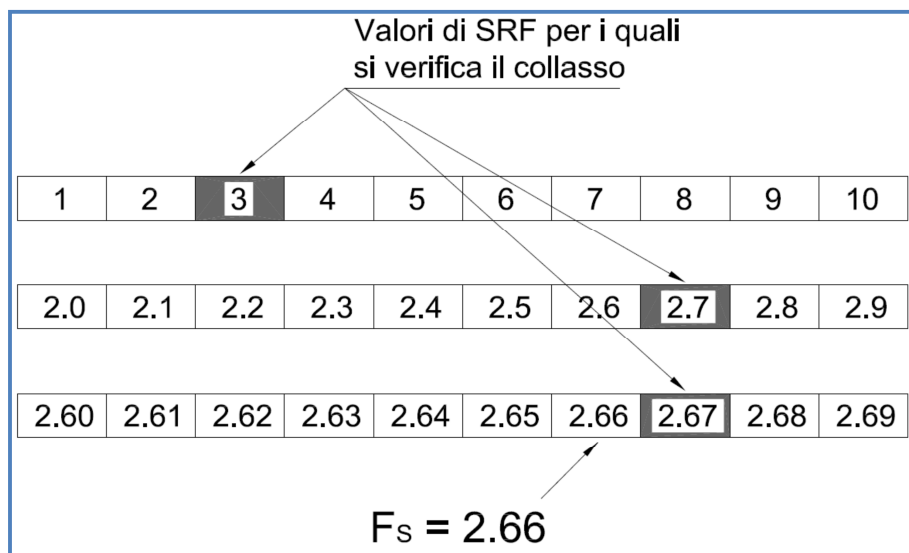
### 2.1. Il metodo SFR (Strength Reduction Factor)

Il metodo SRF (Strength Reduction Factor) permette di approssimare con la precisione voluta le condizioni limite di stabilità, superate le quali si verifica il collasso, di un sistema geotecnico. Il sistema è inizialmente considerato nelle proprie condizioni geometriche e idrologiche ed i terreni sono caratterizzati mediante i parametri geotecnici "caratteristici", ovvero corrispondenti alle rilevazioni in sito (prove di campo e di laboratorio). Il metodo si basa sulla ripetizione della medesima verifica di stabilità, nelle stesse condizioni generali, ma introducendo nei calcoli valori sistematicamente e proporzionalmente ridotti dei soli parametri di resistenza al taglio  $\phi$  e  $c$ . In altre parole, si ripetono più volte i calcoli di stabilità utilizzando parametri geotecnici decrescenti. In questo modo si raggiungono le condizioni di collasso del sistema geotecnico proprio a causa delle scarse caratteristiche di resistenza a taglio introdotte artificialmente. Una volta raggiunto il collasso generalizzato, il fattore di sicurezza del sistema viene espresso come rapporto tra i valori della parametrizzazione geotecnica caratteristica e quelli dei parametri ridotti al limite del collasso. Opportuni approfondimenti delle analisi permettono di stimare con sufficiente precisione i valori dei parametri di resistenza nella "condizione ultima" più prossima al collasso geotecnico. Per definizione, il fattore di sicurezza viene definito come valore di **SFR** per il quale vengono divisi i parametri di resistenza a taglio al verificarsi della "prima" condizione di instabilità. I valori di coesione e attrito interno fattorizzati e introdotti nei calcoli ( $c_f$  e  $\phi_f$ ) si determinano a partire dai valori caratteristici ( $c_k$  e  $\phi_k$ ) come segue:

$$c_f = c_k / SRF \quad \phi_f = \text{Arctan}[(\tan \phi_k) / SRF]$$

Quando l'analisi geotecnica FEM determina il collasso del sistema, il valore di SRF corrispondente viene assunto come fattore di sicurezza FS. E' opinione comune che il metodo SFR costituisca l'impostazione migliore per tutte le verifiche geotecniche svolte utilizzando i metodi FEM, in quanto fornisce automaticamente una valutazione del grado di sicurezza in

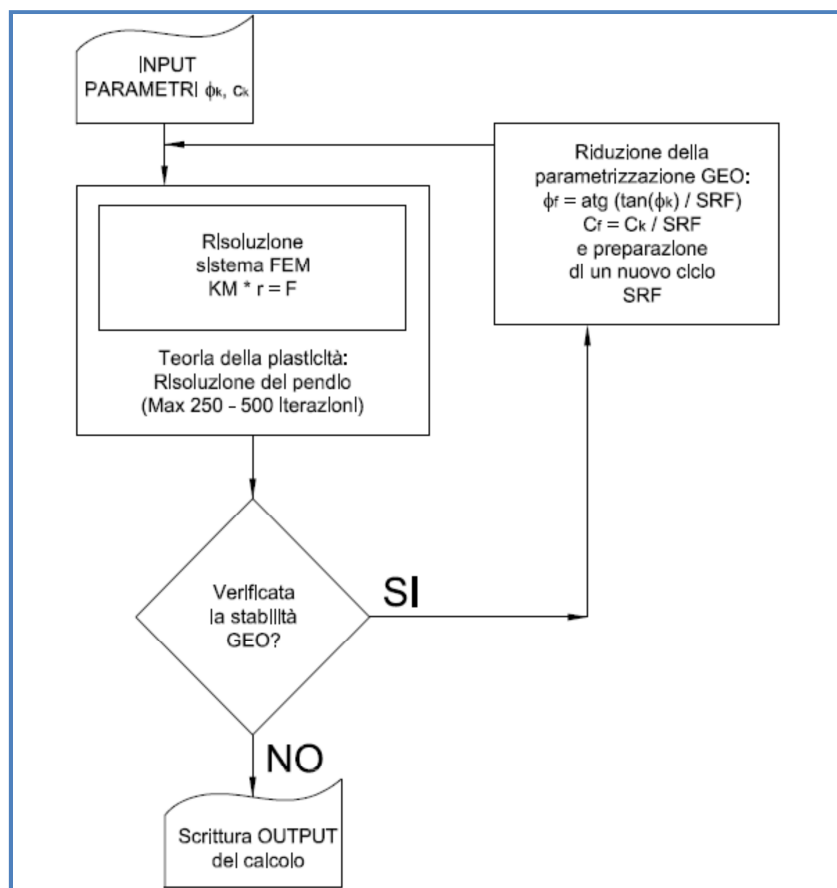
termini di caratteristiche effettive dei terreni in sito. Il metodo è particolarmente utilizzato nell'analisi della stabilità del sistema geotecnico ed ha attinenze evidenti con la determinazione del "coefficiente di sicurezza" svolto con i metodi tradizionali. In generale, i metodi FEM in campo viscoplastico rispondono alla domanda se la stabilità sia verificata e risolvono il problema della determinazione dei cedimenti. D'altra parte, se non si svolgono altre analisi, rimane incerto il grado di sicurezza, con l'incognita di quanto sia prossima (o distante) una situazione di collasso più o meno generalizzato del sistema. Il metodo *SFR* risolve tale problema. Il grado di accuratezza con il quale si determina il fattore di sicurezza nei metodi FEM è nei fatti a discrezione dell'utilizzatore. Esso dipende dal numero di ripetizione delle analisi e dai valori reimpostati del fattore *SFR*. In generale è consigliabile effettuare una serie di ricerche con il metodo *SFR* via via più approfondite iniziando con una griglia di valori interi, passare a successive utilizzando i decimali e i centesimali come suggerito nello schema in Fig. 1.



**Fig. 1-** Graduatoria del fattore *SFR* e determinazione del fattore di sicurezza (da S. Rabuffetti, 2013)

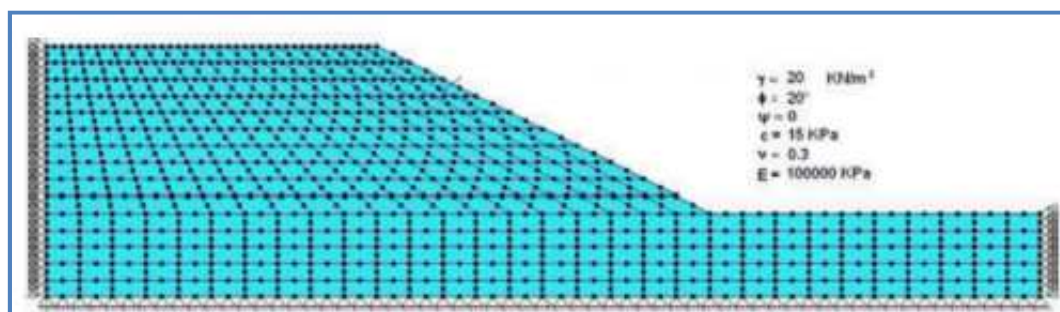
Si assume come fattore di sicurezza l'ultimo valore di *SFR* che verifica la condizione di stabilità prima del collasso generalizzato. L'approssimazione a 1/100, suggerita in figura, è in genere sufficiente in qualsiasi tipo di problema e solo raramente genera instabilità numeriche. Negli algoritmi FEM l'adozione del metodo *SFR* comporta la ripetizione delle calcolazioni con le modalità già presentate per tenere conto della plasticità del terreno. Il suo utilizzo non modifica l'esecuzione delle analisi ma semplicemente ne aumenta il numero. Il diagramma di flusso per l'applicazione del metodo è mostrato nella seguente Fig. 2.





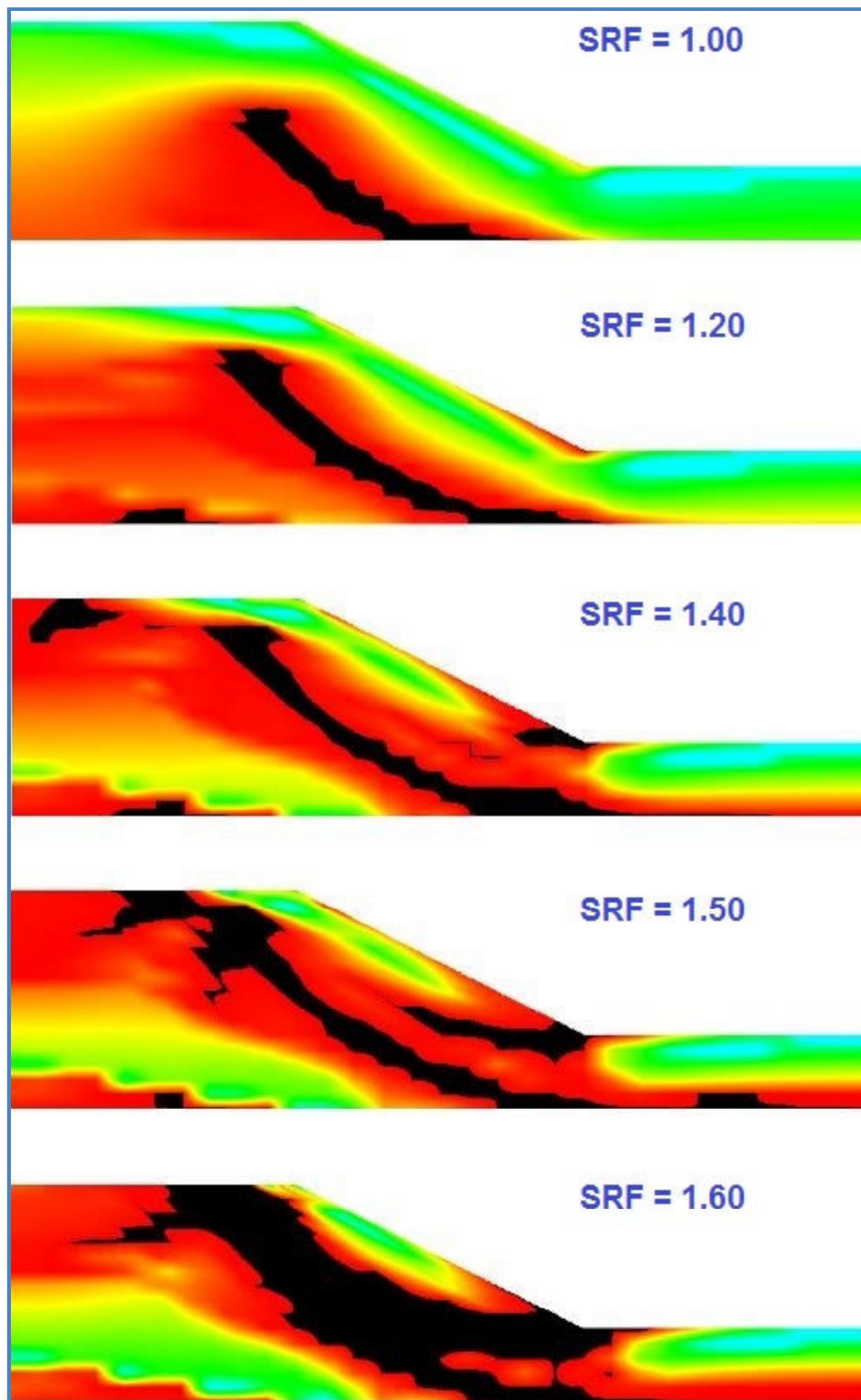
**Fig. 2-** Metodo SRF per un algoritmo viscoplastico (da S. Rabuffetti, 2013)

Nell'analisi delle fasi attraverso le quali un sistema geotecnico giunge a collasso, il metodo SRF permette interessanti considerazioni sul modo in cui si sviluppa la plasticizzazione. Nella seguente Fig. 3 è mostrato un sistema geotecnico che viene sottoposto ad analisi FEM mediante algoritmo viscoplastico, con criterio di collasso di Mohr-Coulomb e funzione di collasso non associata, con esecuzione di un massimo di 500 cicli di analisi per la verifica di convergenza del sistema. Geometria dell'esempio e parametrizzazione geotecnica sono assunti come in Smith - Griffiths (2004).



**Fig. 3-** Esempio di modellazione FEM di un pendio (da Smith - Griffiths 2004)

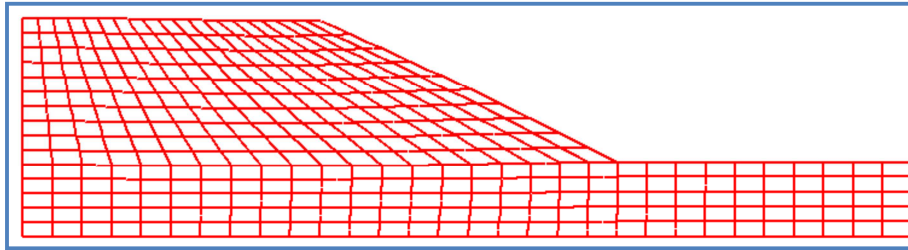
In Fig. 4 è mostrato il meccanismo di sviluppo di zone di plasticizzazione (evidenziate in colore nero) quando ai parametri di resistenza a taglio dello stesso terreno vengono applicati valori di SRF crescenti da 1 fino a 1.60.



**Fig. 4**– Zone di sistema geotecnico plasticizzate al variare di SFR (da S. Rabuffetti ,2013-Fea Slope)

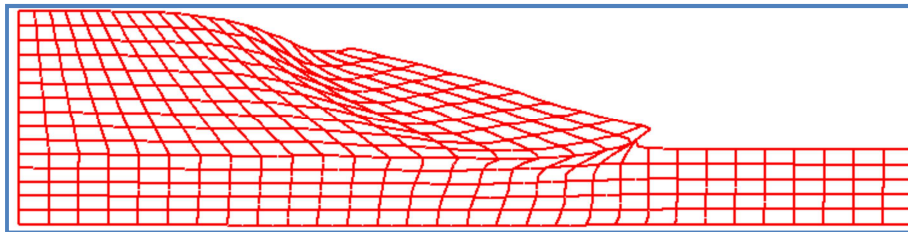
Nel primo ciclo FEM, per  $FS = SFR = 1$ , la parametrizzazione geotecnica corrisponde a quella caratteristica dei terreni. L'analisi evidenzia la plasticizzazione di una certa porzione di suolo interamente confinata al di sotto della superficie topografica. All'aumentare del fattore SRF e perciò al diminuire della resistenza a taglio considerata nei calcoli, i fenomeni di plasticizzazione si estendono progressivamente. Per valori di SRF compresi tra 1.20 e 1.50 le

zone plasticizzate tendono a collegarsi tra loro senza comunque pervenire all'unione, non permettendo formazione di un'unica superficie di scivolamento.



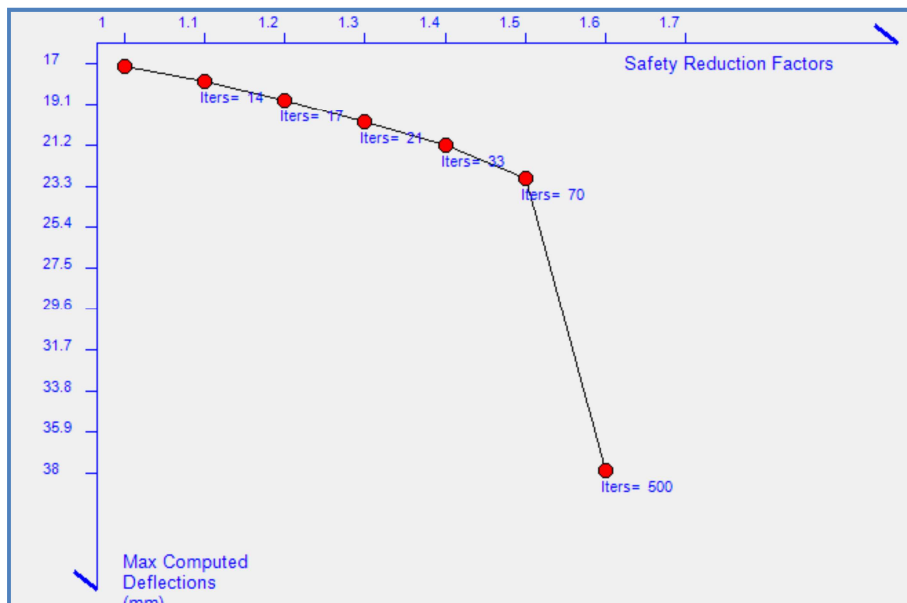
**Fig. 5-** Deformata FEM del sistema geotecnico non collassato (da S. Rabuffetti ,2013-Fea Slope)

Per  $SRF = 1.60$  le zone plasticizzate sono unite un modo da garantire l'esistenza di un'unica superficie di scivolamento che inizia alla sommità del sistema geotecnico e termina al piede. Si noti che le deformate del sistema geotecnico restituite dall'analisi viscoplastica FEM fino a valori variabili di SRF fino a 1.5 sono tutte del tipo mostrato in Fig. 5, in cui non si notano particolari distorsioni della maglia.



**Fig. 6-** Deformata FEM a collasso(da S. Rabuffetti ,2013-Fea Slope)

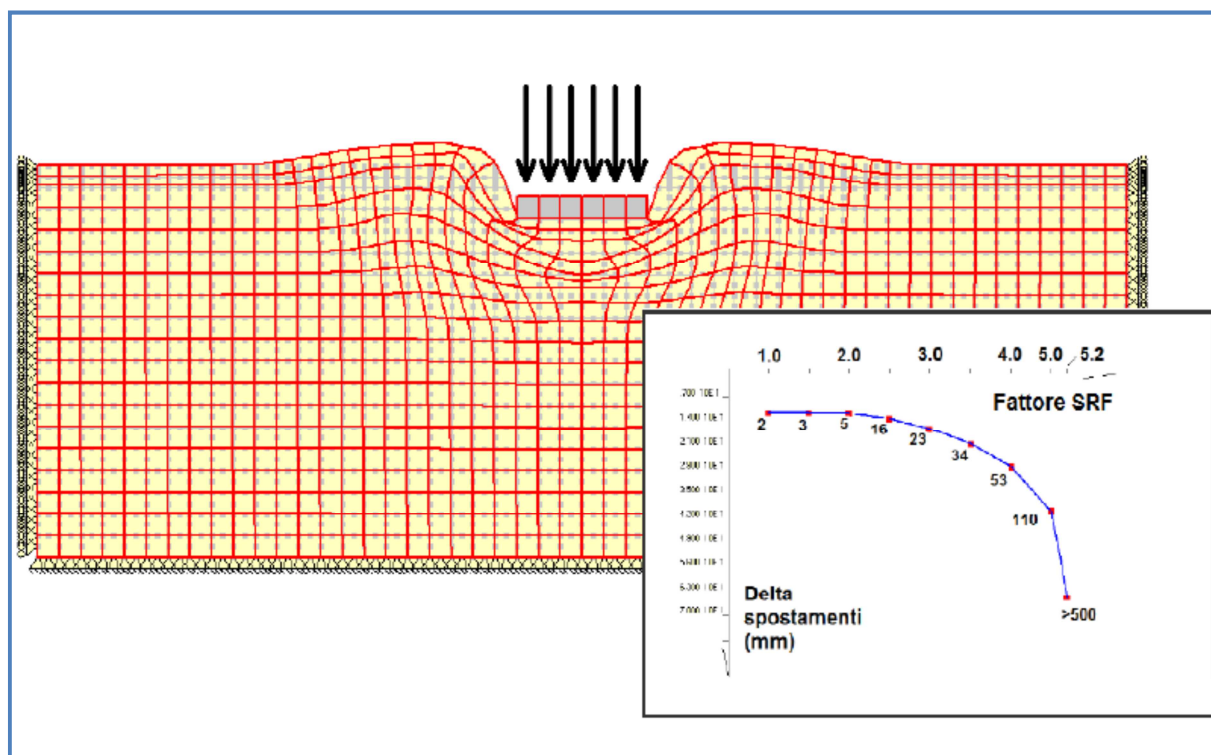
Riportata in scala opportuna, la deformata a collasso ( $SFR = 1.6$ ) è quella mostrata in Fig. 6, dove è facilmente ricostruibile un cinematismo collegato ad una più o meno ben definita superficie di scivolamento. Un ulteriore modo di evidenziare i fenomeni associati al collasso di un sistema geotecnico consiste nel graficizzare gli spostamenti massimi determinati mediante l'analisi FEM in funzione del valore di SRF applicato, come mostrato in Fig.7.



**Fig. 7-** Grafico Spostamenti / SFR(da S. Rabuffetti ,2013-Fea Slope)

## 2.2. Il metodo dello Stress Level - incremento dei carichi esterni

Un secondo tipo di verifica geotecnica è più usuale per i problemi in cui vi è presenza di carichi esterni, come nel classico problema di valutazione della capacità portante di una fondazione. In questi casi si preferisce definire il fattore di sicurezza FS come rapporto tra il carico che produce il collasso di un sistema geotecnico diviso per il carico nominale per il quale deve essere verificato il sistema. In altri termini, detti  $p_{lim}$  il carico ultimo che genera collasso e  $p_0$  il carico per il quale si esegue la verifica, il fattore di sicurezza è definito come  $FS = p_{lim} / p_0$ .



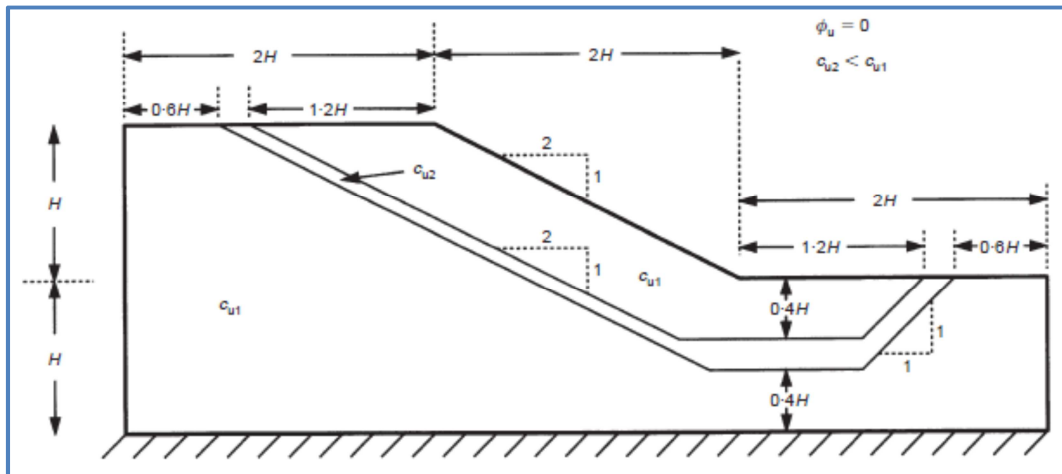
**Fig. 8-** Applicazione del metodo del fattore di sicurezza per carichi in aumento

In Fig. 8 è mostrata l'analisi di una fondazione diretta rigida caricata verticalmente con una sollecitazione uniforme, poggiante su terreno argilloso avente coesione non drenata pari a 100 Kpa. La fondazione viene sottoposta a carichi crescenti fino a collasso, che avviene quando la sollecitazione è pari a 520 Kpa, risultato ben paragonabile al valore "geotecnico" di capacità portante dato da  $2 (+ \pi) * C_u = 5.14 * 100 = 514$  Kpa.

Il collasso viene registrato dopo l'esecuzione di 500 iterazioni viscoplastiche in corrispondenza di un sensibile aumento dei cedimenti che mostra una discontinuità in aumento in corrispondenza dell'applicazione di un fattore amplificativo del carico pari a 5.20.

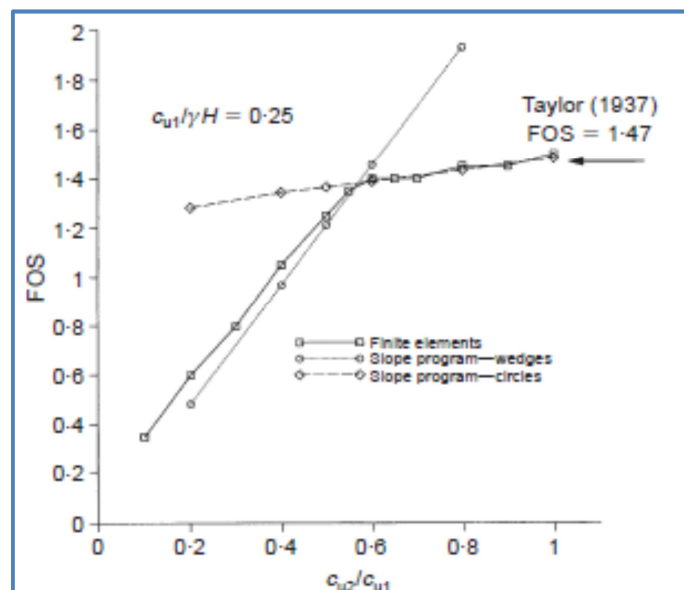
### 3. CASO DI STUDIO – VALIDAZIONE ELEMENTI NON LINEARI NOLIAN EE

Si procede ora all'illustrazione di un'applicazione operata per la validazione dell'ambiente Earthquake Engineering di Nòlian All In One e degli elementi finiti non lineari n-dimensionali in esso implementati. L'esempio benchmark, è tratto dalla pubblicazione “ *Slope stability analysis by finite elements D.V.GRIFFITHS and P.A. LANE (1999).*”, pubblicata dalla rivista internazionale *Géotechnique 49, No. 3, 387-403*, riportato in fig.9



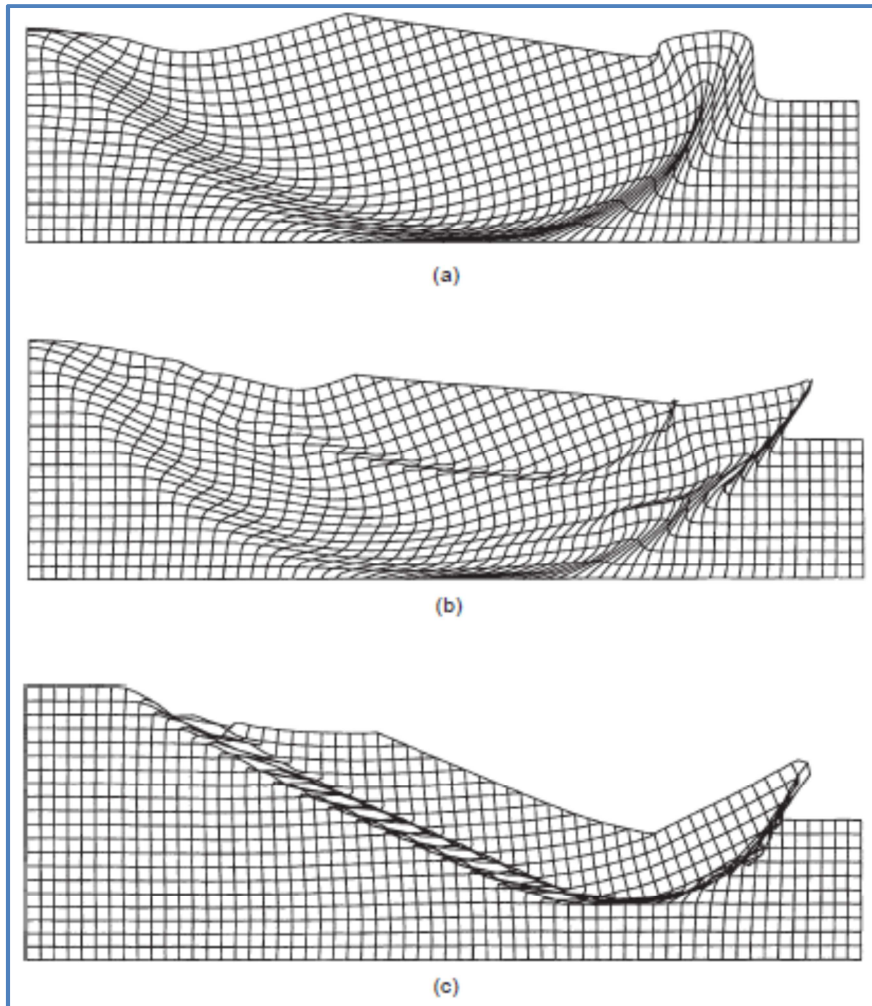
**Fig. 9-** Example 3: Undrained clay slope with a foundation layer including a thin weak layer ( $D=2$ ,  $c_{u1}/\gamma H= 0.25$ )

Gli autori studiano il pendio riportato in fig.9, con geometria regolare, in condizioni non drenate e con riferimento a due litologie di terreni di cui una lente sottile. Scopo del presente studio è quello di mettere in evidenza il diverso meccanismo di collasso che si instaura nel pendio al variare del rapporto delle coesioni non drenate  $c_{u1}/c_{u2}$  rispetto a tre casi tipici **1.00- 0.60-0.20**. I risultati in termini di fattore di sicurezza del pendio e del meccanismo di collasso sono riportati nelle fig.10 e 11 nonché in tabella seguente:



**Fig. 10-**Example 3: Computed factor of safety (FOS) for different values of  $c_{u2}/c_{u1}$





**Fig. 11-** Example 3: Deformed meshes at failure corresponding to the un-converged solution for three different values of  $cu_2/cu_1$  (a)  $cu_2/cu_1=1.0$ , (b)  $cu_2/cu_1= 0.6$ ; (c)  $cu_2/cu_1= 0.2$

RISULTATI		
CASO $Cu_1=0.50 \text{ kg/cm}^2$	FATTORE DI SICUREZZA	MECCANISMO DI COLLASSO
1 $(cu_1/cu_2=1.00)$	1.45	<i>Nel caso 1(fig.11a), essendo il pendio omogeneo si ottiene un meccanismo di scivolamento rotazionale con superficie sub-circolare tanto più profonda al crescere di <b>cu</b>.</i>
2 $(cu_1/cu_2=0.60)$	1.37	<i>Nel caso 2(fig.11b), la presenza della lente con caratteristiche più scadenti fa si che il meccanismo di rottura sia multiplo con una sup. più profonda sub-circolare e una superficiale con forma mistilinea. <b>Il fattore di sicurezza diminuisce.</b></i>
3 $(cu_1/cu_2=0.20)$	0.55	<i>Nel caso 3(fig.11c), la presenza della lente con caratteristiche molto scadenti fa si che la banda di rottura a taglio si localizzi all'interfaccia tra i due materiali con superfice e meccanismo imposto dalla sup. di separazione. <b>Il fattore di sicurezza diminuisce notevolmente con pendio instabile.</b></i>

### 3.1. Analisi in ambiente EE di Nolian All-in-one

Il modello FEM realizzato in Nolian EE è riportato in fig.12, nell'immagine sono indicati anche i vincoli assegnati ai vari lati degli elementi che descrivono il pendio. I materiali utilizzati sono n-dimensionale di Von Mises (Plastico J2), con coesione drenata iniziale pari a  $0.50 \text{ kg/cm}^2$ .

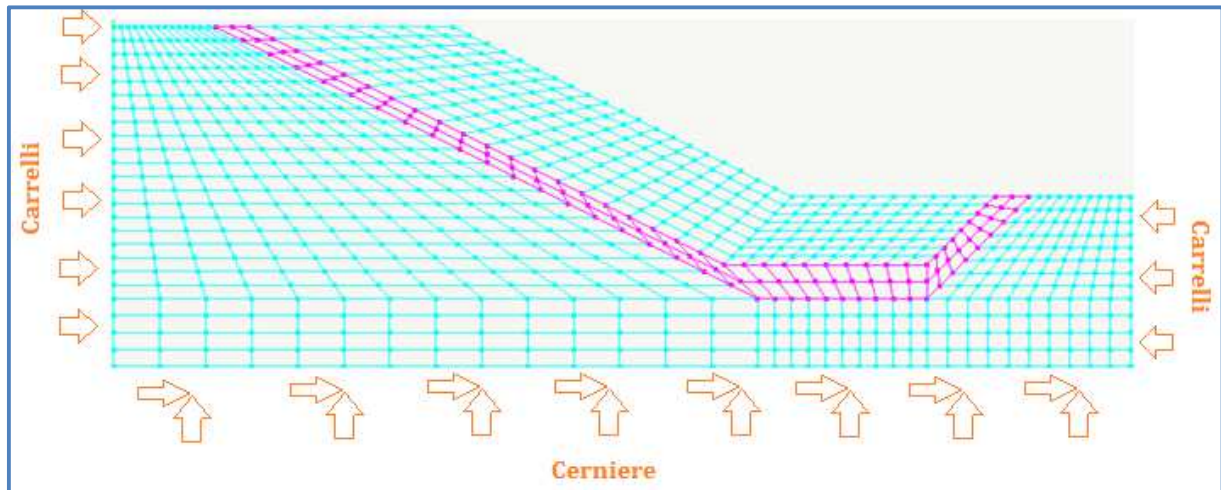


Fig. 12- Modello FEM di Nolian EE

Il metodo applicato per il calcolo è l'SFR (Strenght Factor Reduction), tale metodo consiste nel ripetere l'analisi elastoplastica più volte con parametri a seconda dei tre casi studio crescenti o decrescenti, ossia pendio stabile ed instabile. L'analisi non lineare viene effettuata con il metodo delle rigidzze tangenti ed in controllo di carico.

#### CASO 1 : $Cu1/Cu2=1.00$

I fattori *SFR* scelti per le analisi del *CASO 1*, sono riportati nella tabella sottostante, dove sono stati registrati gli spostamenti massimi per ogni analisi. Il grafico costruito con i risultati restituiti da Nòlian con il Fattore di sicurezza (*SFR*) e lo spostamento massimo ( $U_{max}$ ) è riportato in fig.13.

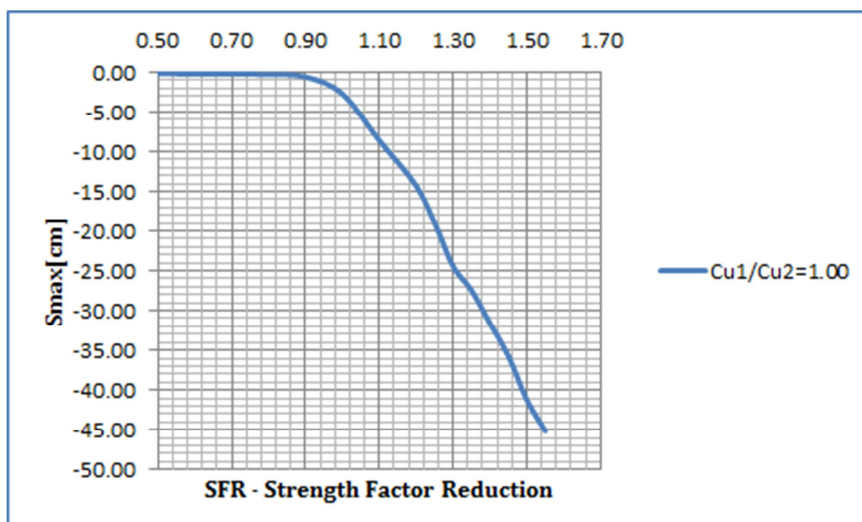
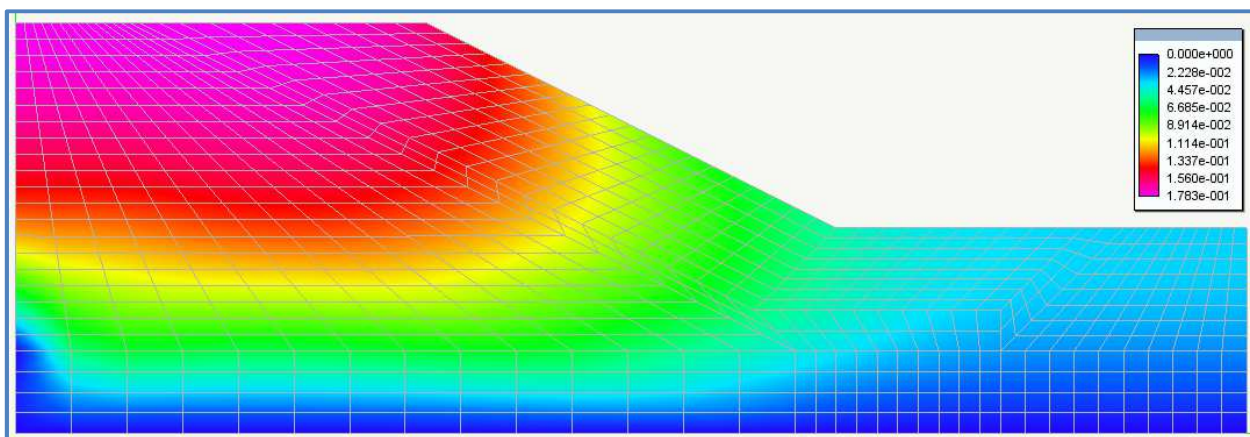


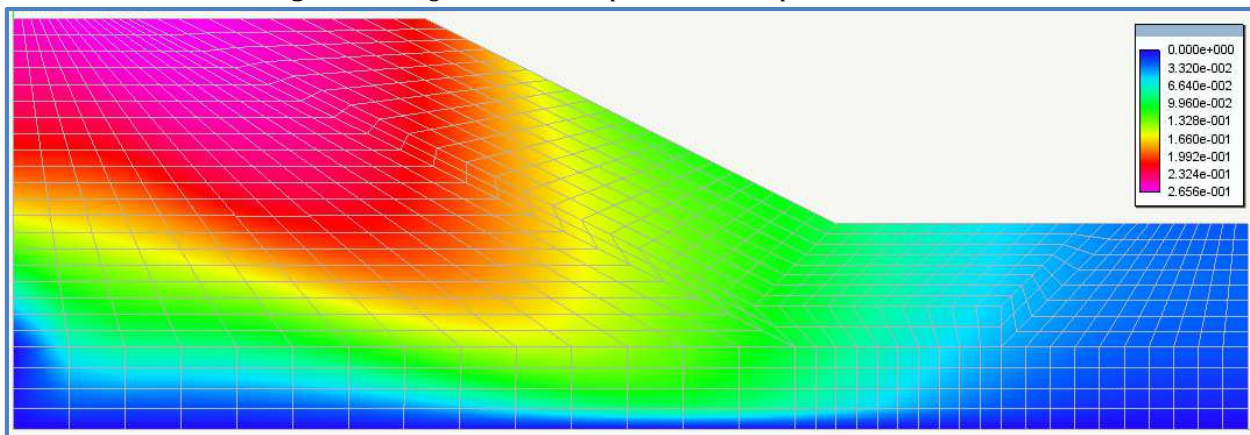
Fig. 13- Grafico SFR/Spostamento max  $\rightarrow$ SRF=1.50

VALORI DEL FACTORY SAFETY → SFR														
0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.10	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45	1.50	1.55
MASSIMO SPOSTAMENTO REGISTRATO (cm)														
0.18	0.20	0.23	0.27	0.58	2.72	8.59	14.3	19.0	24.4	27.5	31.6	35.7	41.2	45.1

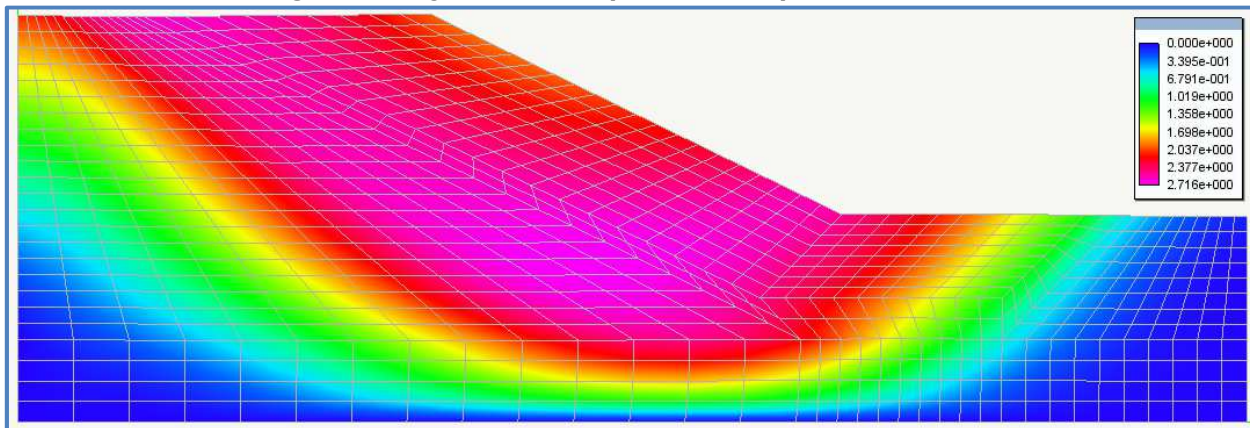
Nel seguito vengono riportate le immagini dei risultati di analisi ottenuti da Earthquake Engineering (EE), in cui si ha per ogni step la mappatura degli spostamenti lungo il pendio. Gli stessi vengono amplificati di un fattore di scala 10 al fine di poter apprezzare la formazione del cinematismo.



**Fig. 14-** Immagine da EE - Isospostamenti del pendio → SRF=0.50

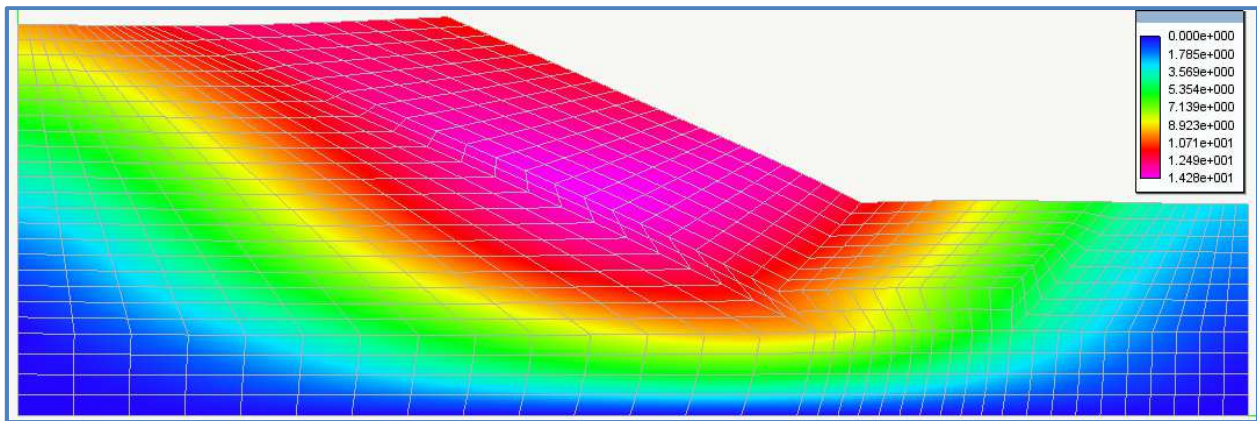


**Fig. 15-** Immagine da EE - Isospostamenti del pendio → SRF=0.80

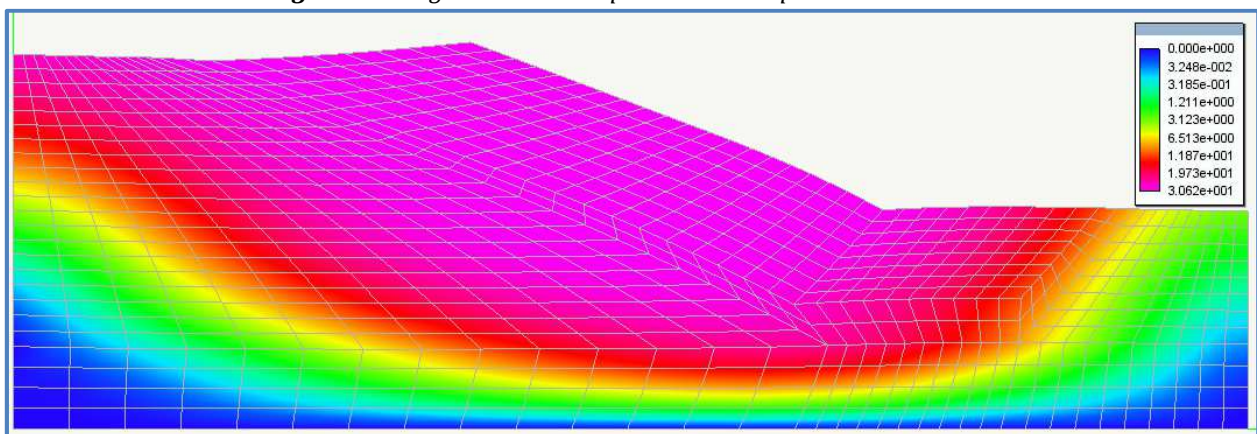


**Fig. 16-** Immagine da EE - Isospostamenti del pendio → SRF=1.00

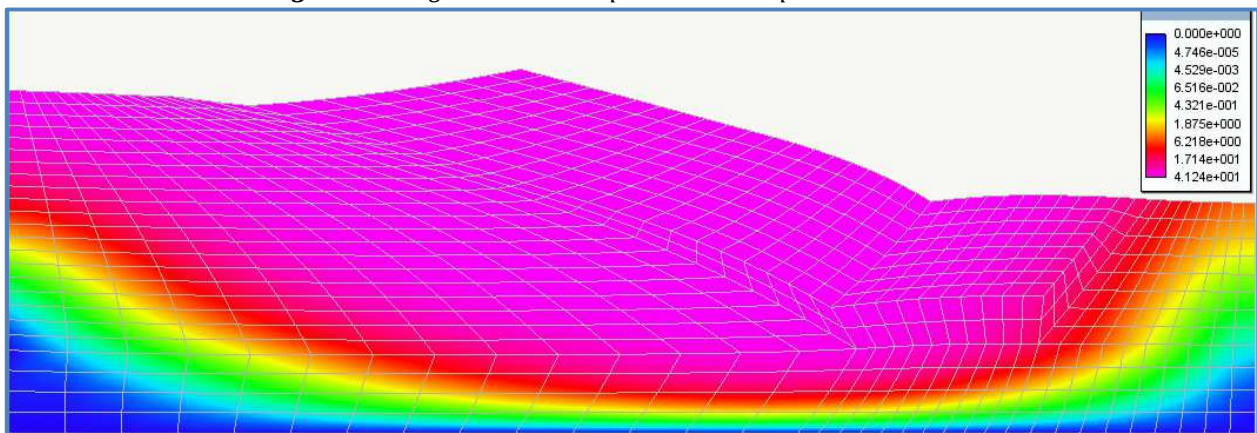




**Fig. 17-** Immagine da EE - Isostamenti del pendio → SRF=1.20



**Fig. 18-** Immagine da EE - Isostamenti del pendio → SRF=1.40



**Fig. 19-** Immagine da EE - Isostamenti del pendio → SRF=1.50

Come è possibile apprezzare dalle figure precedenti e dai risultati numerici ottenuti, come il software Earthquake Engineering di Nòlian, riesca a riprodurre con precisione i valori di letteratura ed il meccanismo di collasso ottenuto che coinvolge l'intero pendio con una superficie sub-circolare. L'errore commesso sul fattore di sicurezza rientra nei limiti di accettabilità e dipende dal grado di suddivisione del fattore di riduzione dei parametri geotecnici. Nel caso in oggetto lo scarto è:

$$\Delta F_s = (1.50 - 1.45) / 1.50 = 3.33\%$$

completamente accettabile per lo studio in oggetto.

## CASO 2 : $Cu1/Cu2=0.60$

I fattori SFR scelti per le analisi del CASO 2, sono riportati nella tabella sottostante, dove sono stati registrati gli spostamenti massimi per ogni analisi. Il grafico costruito con i risultati restituiti da Nòlian con il Fattore di sicurezza (SFR) e lo spostamento massimo ( $U_{max}$ ) è riportato in fig.20.

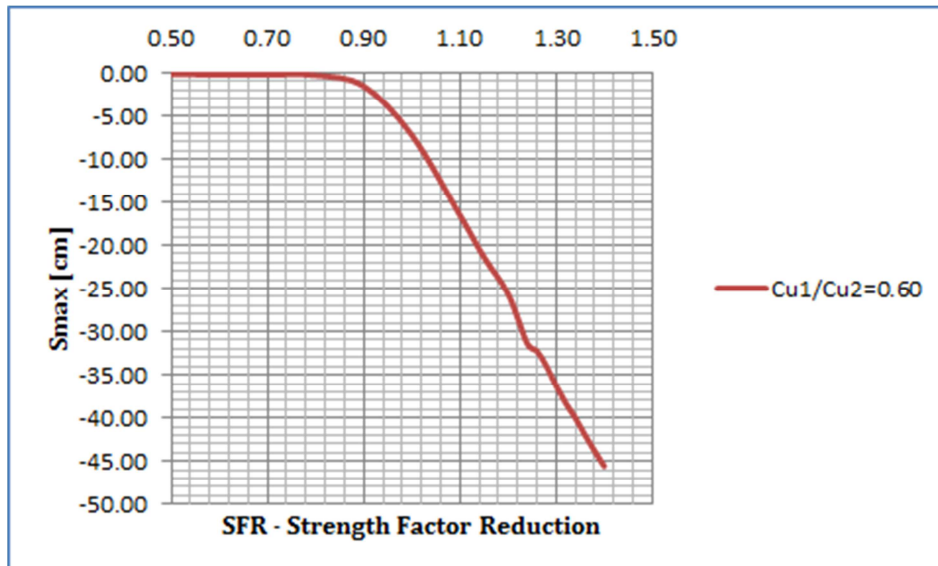


Fig. 20- Grafico SFR/Spostamento max  $\rightarrow$ SRF=1.40

VALORI DEL FACTORY SAFETY $\rightarrow$ SFR														
0.80	0.90	1.00	1.10	1.15	1.20	1.24	1.26	1.28	1.30	1.32	1.34	1.36	1.38	1.40
MASSIMO SPOSTAMENTO REGISTRATO (cm)														
0.28	1.56	7.24	16.5	21.4	25.6	31.4	32.2	34.0	36.3	38.3	40.0	42.0	43.8	45.6

Nel seguito vengono riportate le immagini dei risultati di analisi ottenuti da Earthquake Engineering, in cui si ha per ogni step la mappatura degli spostamenti lungo il pendio. Gli stessi vengono amplificati di un fattore di scala 10 al fine di poter apprezzare la formazione del cinematismo.

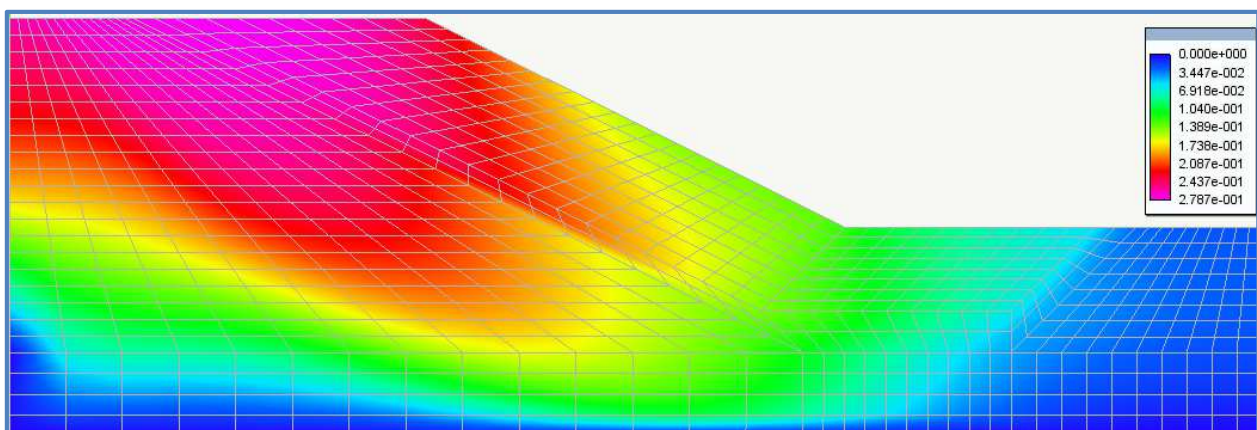
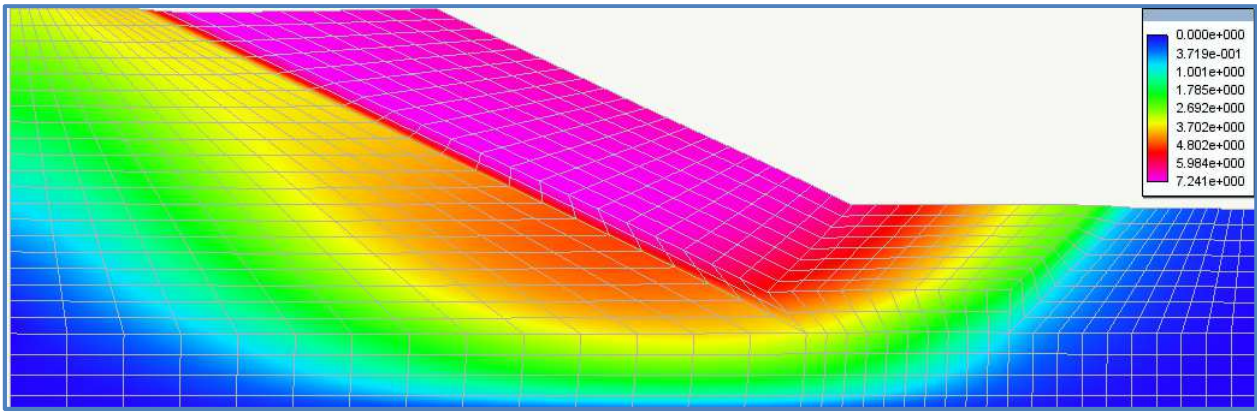
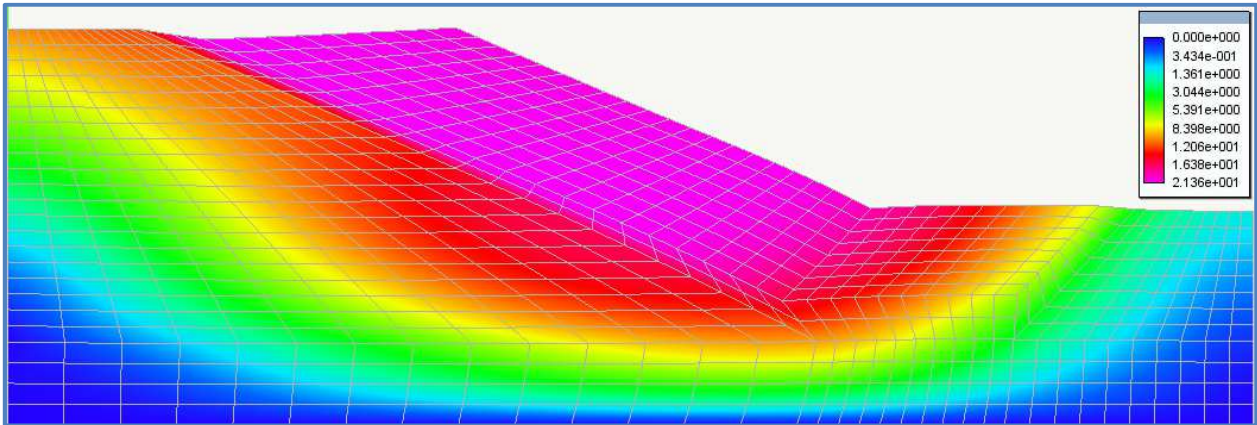


Fig. 21- Immagine da EE - Isospostamenti del pendio  $\rightarrow$ SRF=0.80

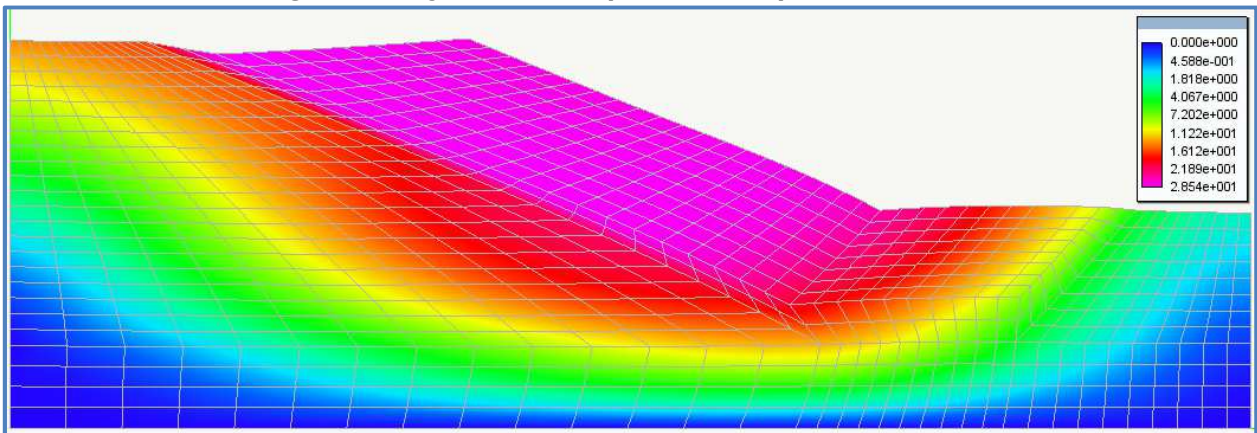




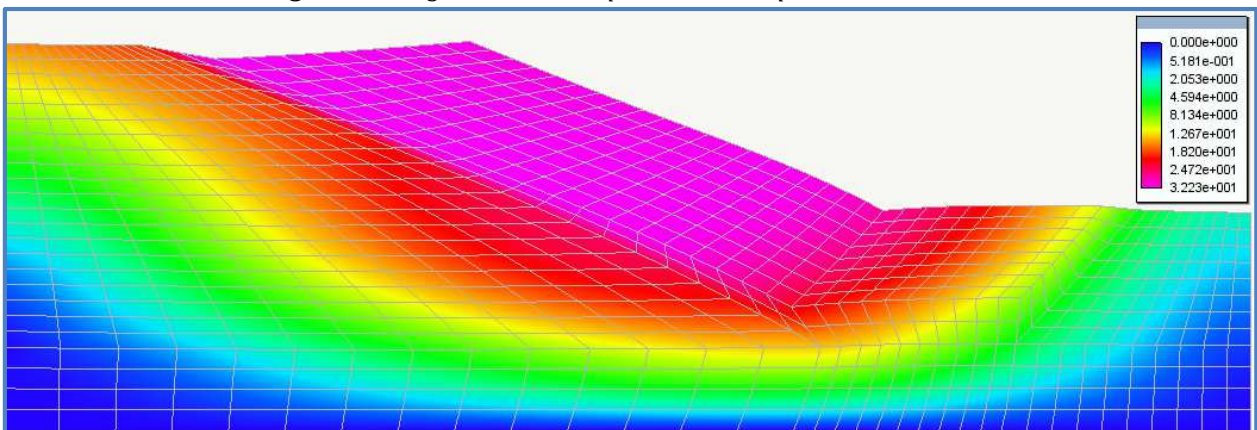
**Fig. 22-** Immagine da EE - Isopostamenti del pendio → SRF=1.00



**Fig. 23-** Immagine da EE - Isopostamenti del pendio → SRF=1.15

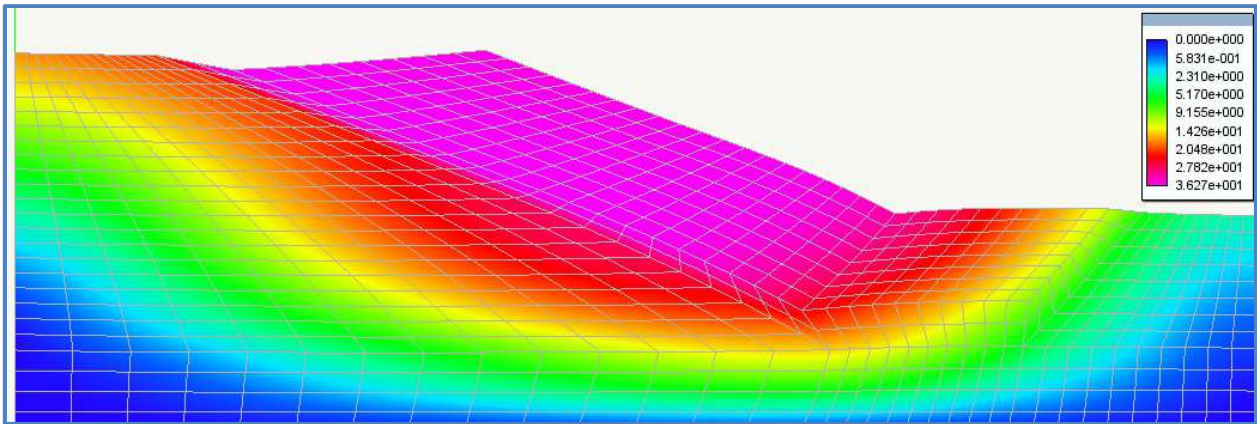


**Fig. 24-** Immagine da EE - Isopostamenti del pendio → SRF=1.22

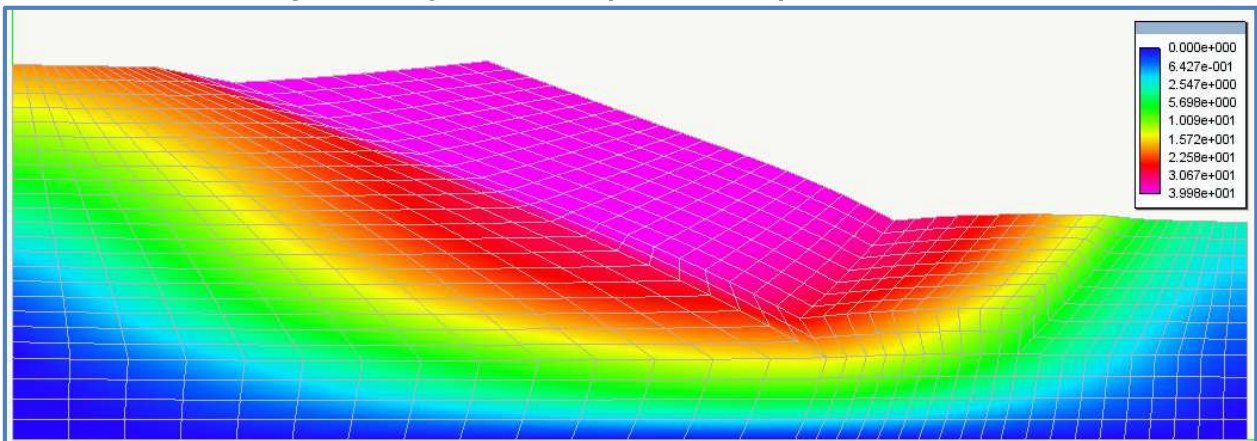


**Fig. 25-** Immagine da EE - Isopostamenti del pendio → SRF=1.26

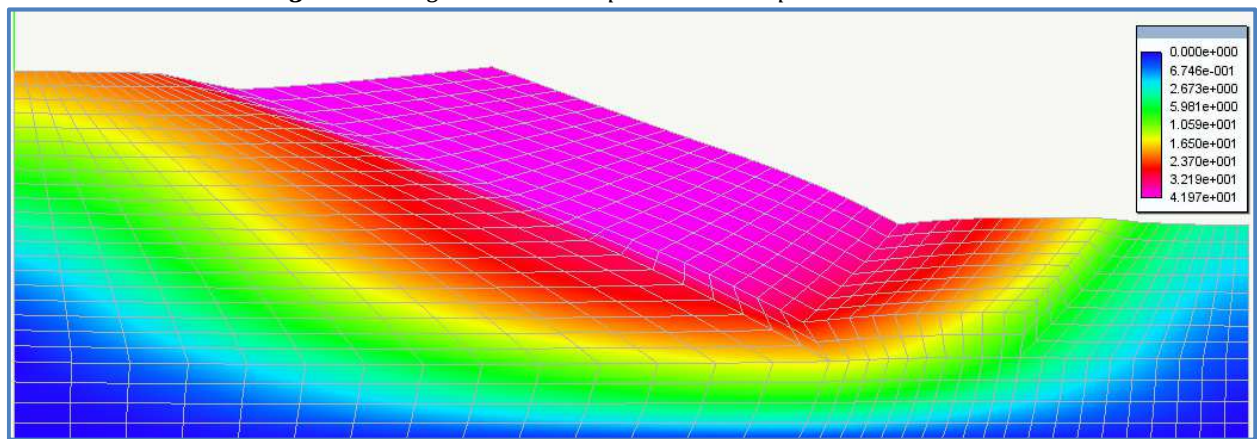




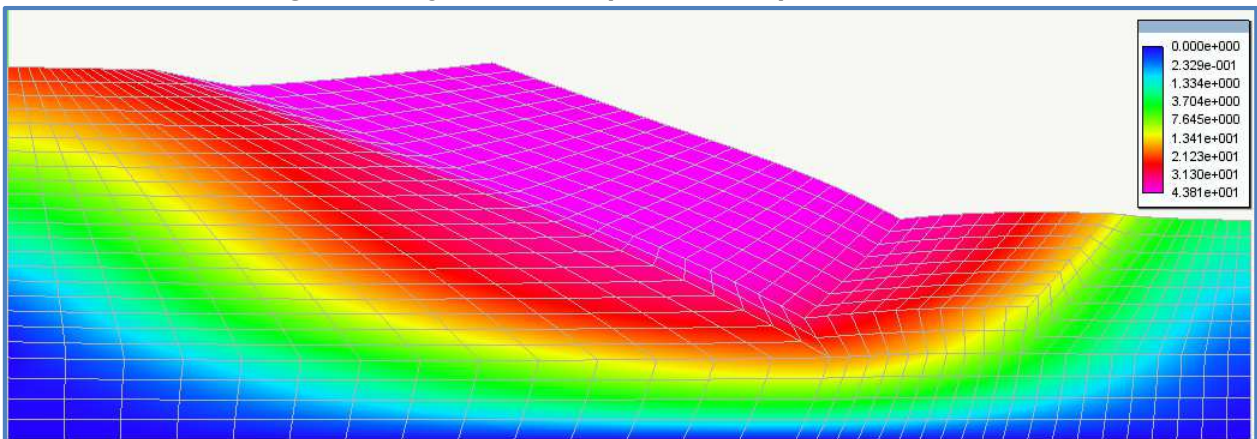
**Fig. 26-** Immagine da EE - Isostamenti del pendio → SRF=1.30



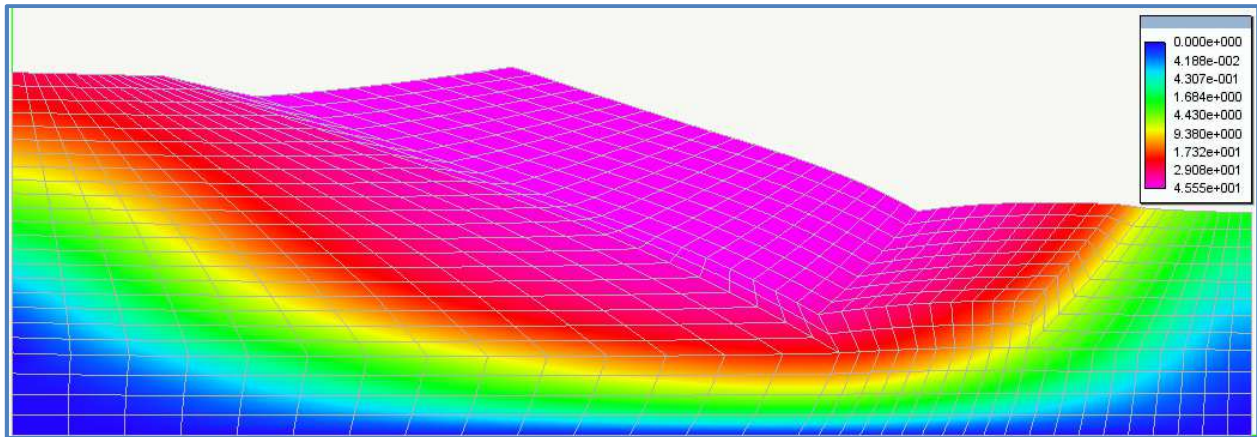
**Fig. 27-** Immagine da EE - Isostamenti del pendio → SRF=1.34



**Fig. 28-** Immagine da EE - Isostamenti del pendio → SRF=1.36



**Fig. 29-** Immagine da EE - Isostamenti del pendio → SRF=1.38



**Fig. 30-** Immagine da EE - Isostamenti del pendio → SRF=1.40

Come è possibile apprezzare dalle figure precedenti e dai risultati numerici ottenuti, si può osservare la capacità che il software Earthquake Engineering di Nòlian, ha nel riprodurre con precisione i valori di letteratura ed il meccanismo di collasso ottenuto che coinvolge l'intero pendio con la formazione di due superfici di scorrimento una profonda sub-circolare e l'altra più superficiale mistilinea. L'errore commesso sul fattore di sicurezza rientra nei limiti di accettabilità e dipende dal grado di suddivisione del fattore di riduzione dei parametri geotecnici. Nel caso in oggetto lo scarto è:

$$\Delta F_s = (1.40 - 1.37) / 1.40 = 2.15\%$$

completamente accettabile per lo studio in oggetto.



### CASO 3 : $Cu1/Cu2=0.20$

I fattori SFR scelti per le analisi del CASO 2, sono riportati nella tabella sottostante, dove sono stati registrati gli spostamenti massimi per ogni analisi. Il grafico costruito con i risultati restituiti da Nòlian con il Fattore di sicurezza (SFR) e lo spostamento massimo ( $U_{max}$ ) è riportato in fig.31.

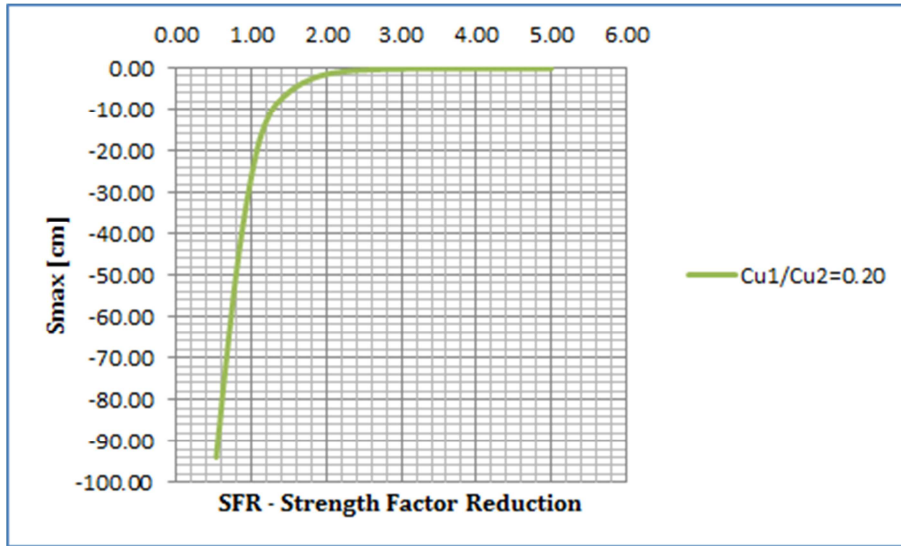


Fig. 31- Grafico SFR/Spostamento max →SRF=0.53

VALORI DEL FACTORY SAFETY → SFR														
2.00	1.67	1.43	1.25	1.11	1.00	0.91	0.83	0.77	0.71	0.67	0.63	0.59	0.56	0.53
MASSIMO SPOSTAMENTO REGISTRATO (cm)														
1.55	3.77	6.94	10.9	17.2	25.7	34.9	44.0	53.0	61.8	69.7	76.5	83.1	88.7	93.9

Nel seguito vengono riportate le immagini dei risultati di analisi ottenuti da Earthquake Engineering, in cui si ha per ogni step la mappatura degli spostamenti lungo il pendio. Gli stessi vengono amplificati di un fattore di scala 10 al fine di poter apprezzare la formazione del cinematismo.

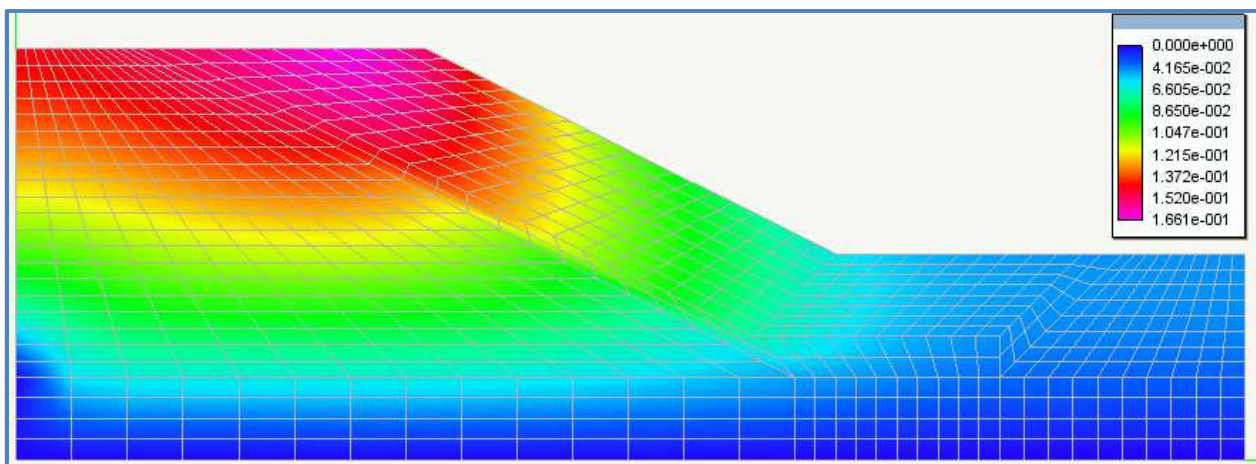
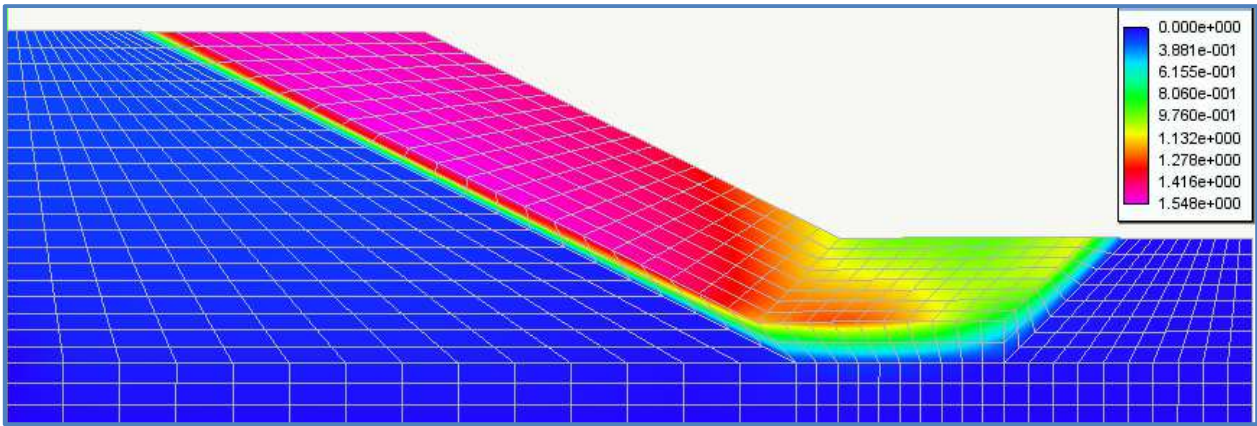
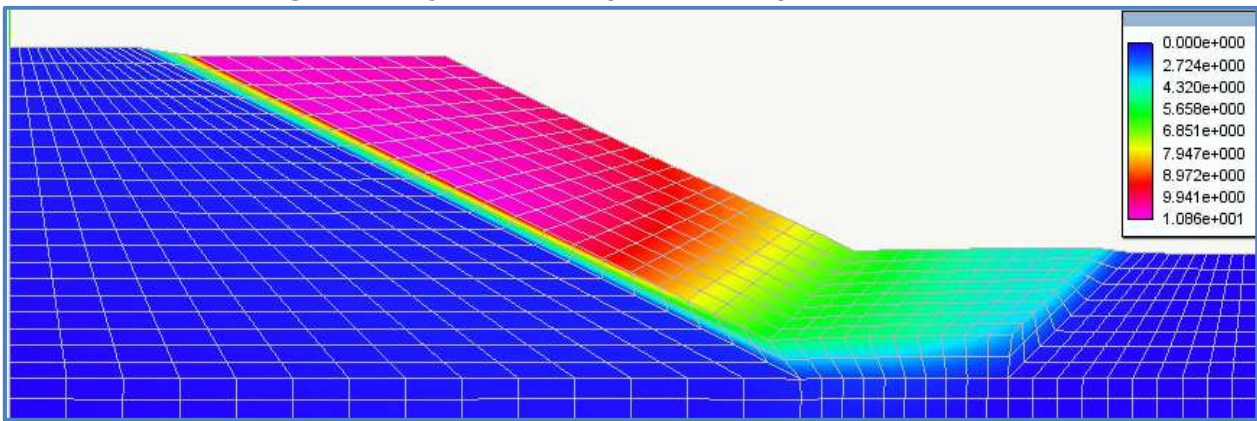


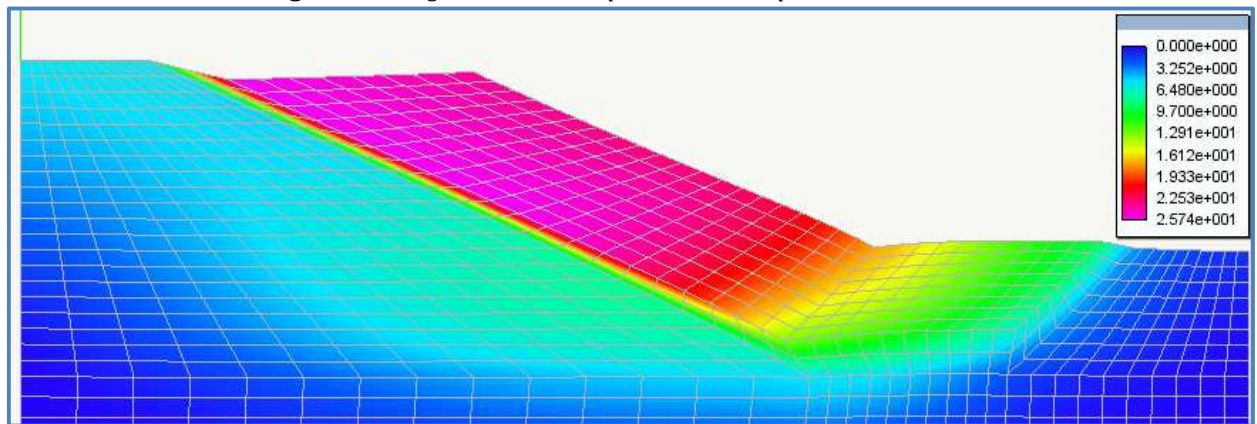
Fig. 32- Immagine da EE - Isospostamenti del pendio → SRF=5.00



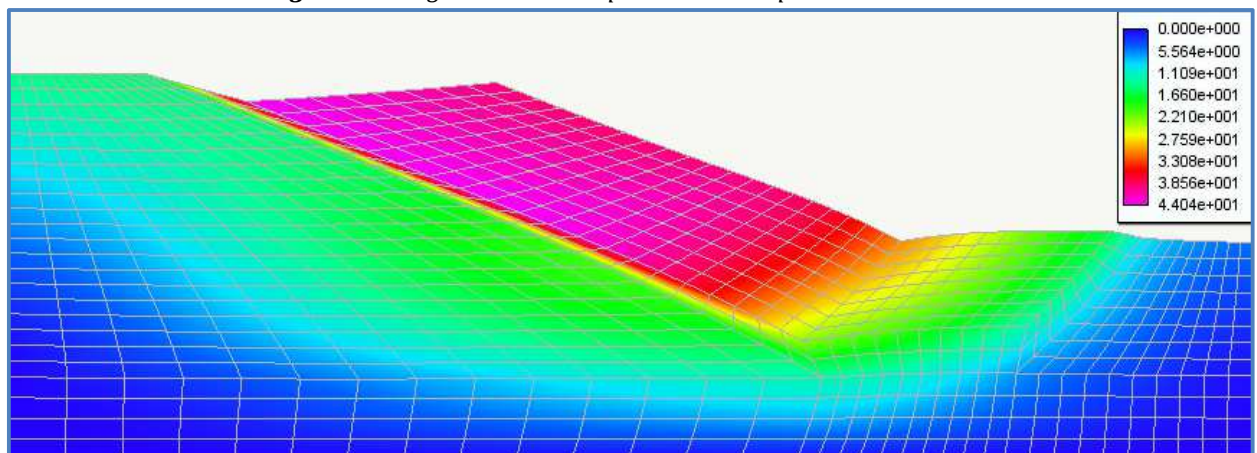
**Fig. 33-** Immagine da EE - Isospostamenti del pendio → SRF=2.00



**Fig. 34-** Immagine da EE - Isospostamenti del pendio → SRF=1.25

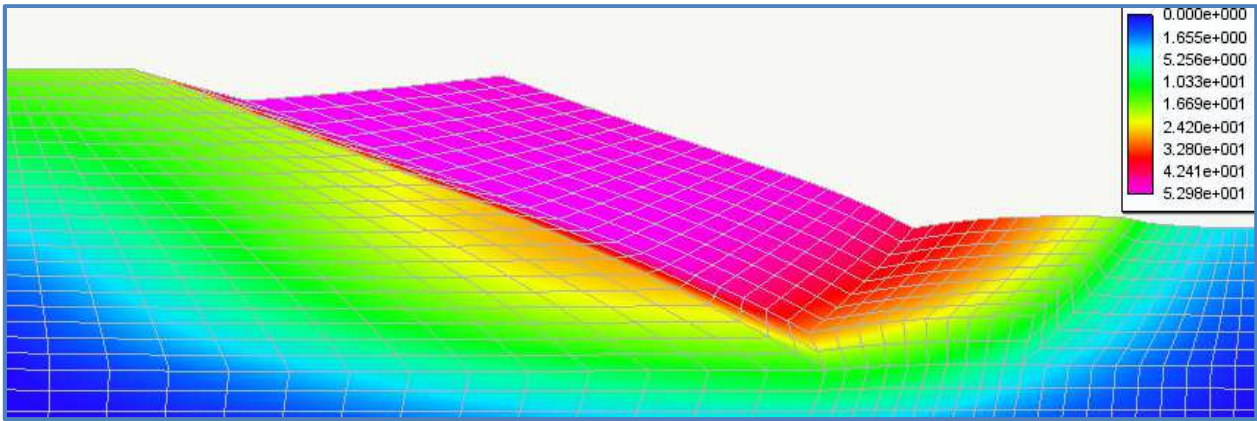


**Fig. 35-** Immagine da EE - Isospostamenti del pendio → SRF=1.00

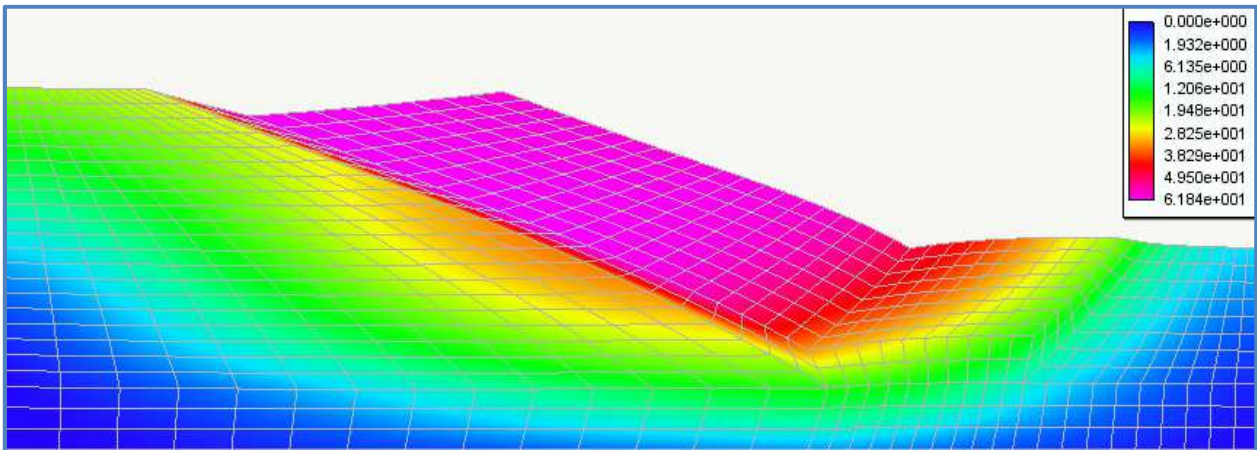


**Fig. 36-** Immagine da EE - Isospostamenti del pendio → SRF=0.83

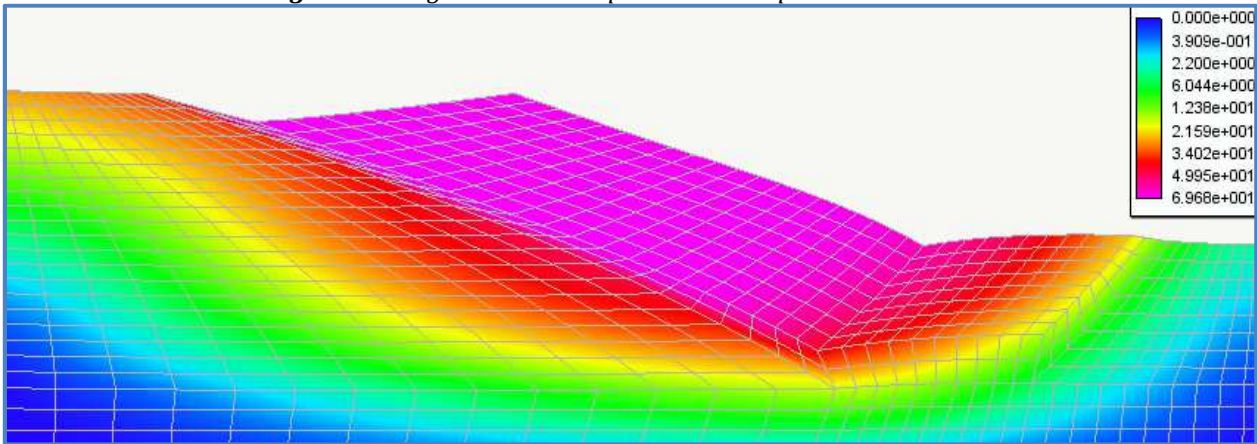




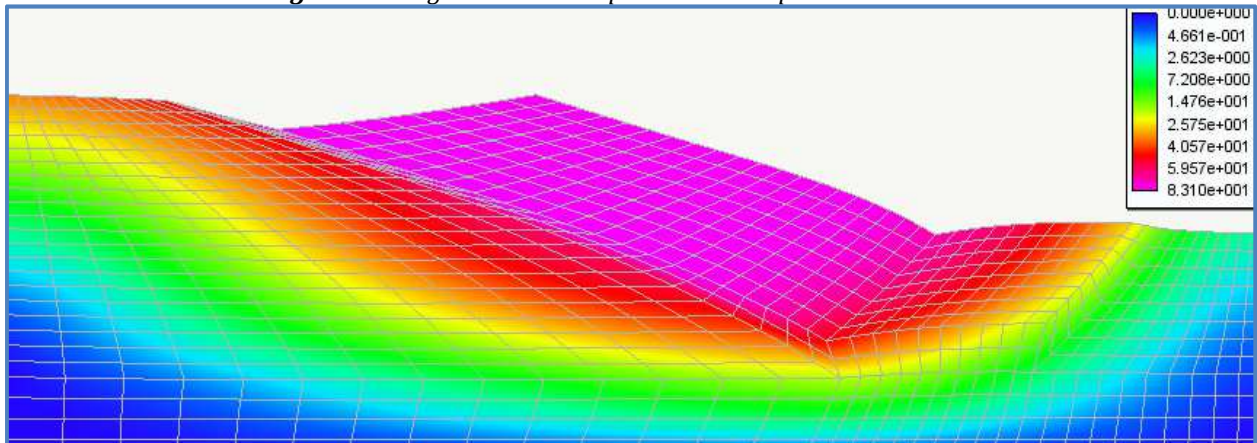
**Fig. 37-** Immagine da EE - Isospostamenti del pendio → SRF=0.77



**Fig. 38-** Immagine da EE - Isospostamenti del pendio → SRF=0.71

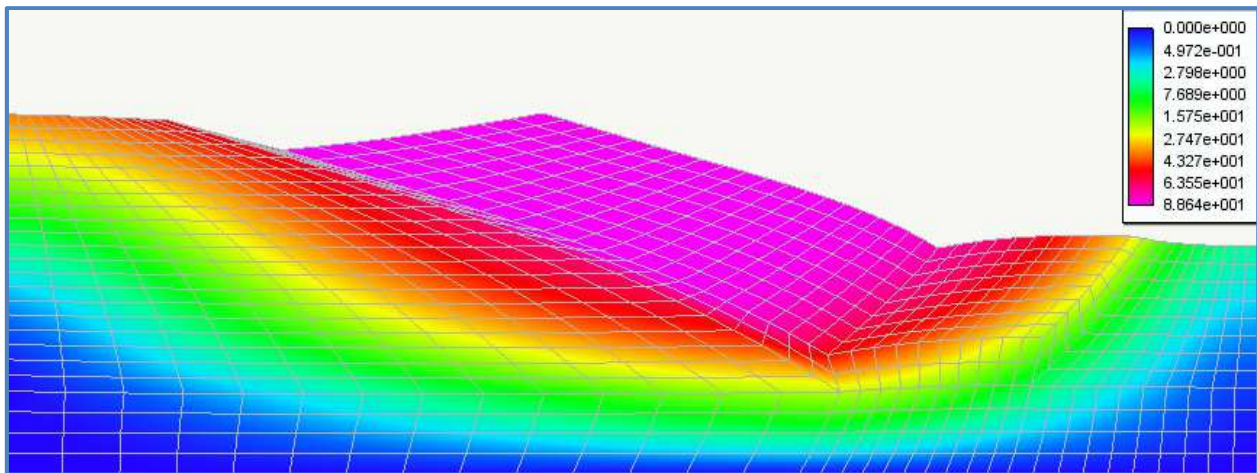


**Fig. 39-** Immagine da EE - Isospostamenti del pendio → SRF=0.67

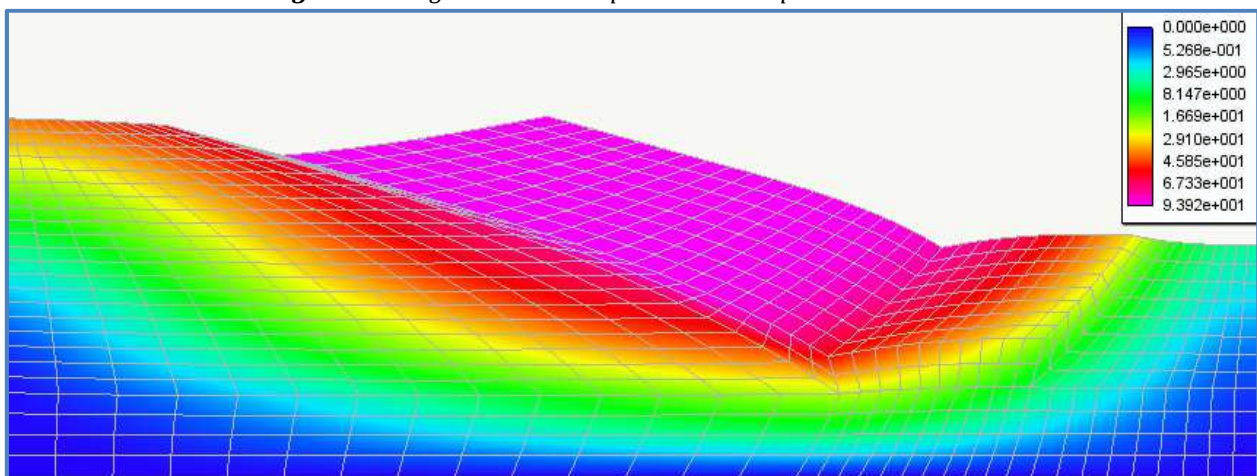


**Fig. 40-** Immagine da EE - Isospostamenti del pendio → SRF=0.59





**Fig. 41-** Immagine da EE - Isostipamenti del pendio → SRF=0.56



**Fig. 42-** Immagine da EE - Isostipamenti del pendio → SRF=0.53

Come è possibile apprezzare dalle figure precedenti e dai risultati numerici ottenuti, si può osservare la capacità che il software Earthquake Engineering di Nòlian, ha nel riprodurre con precisione i valori di letteratura ed il meccanismo di collasso ottenuto che coinvolge la parte superiore del pendio a causa della scarsa resistenza della lente argillosa e con superficie di scorrimento coincidente con la separazione degli strati. L'errore commesso sul fattore di sicurezza rientra nei limiti di accettabilità e dipende dal grado di suddivisione del fattore di riduzione dei parametri geotecnici. Nel caso in oggetto lo scarto è:

$$\Delta F_s = (0.53 - 0.55) / 0.53 = -3.77\%$$

completamente accettabile per lo studio in oggetto.

## 4. COMPORTAMENTO MECCANICO DEI GEOMATERIALI

Viene riportata nel seguito una breve trattazione della teoria atta a descrivere il comportamento non lineare dei materiali idonei a descrivere il comportamento reale del terreno con accettabile grado di approssimazione.

### 2.3. Comportamento elastoplastico dei materiali

Un materiale è detto non lineare se la relazione tra tensioni e deformazioni è rappresentata da una matrice di rigidità variabile in funzione degli spostamenti nodali e non a coefficienti costanti tipico del comportamento lineare del sistema. Il flusso plastico rappresenta una delle cause della non linearità di un materiale. Durante la deformazione plastica il materiale può fluire in maniera “*associata*” per cui il vettore dell’incremento della deformazione plastica può essere normale alla superficie di cedimento o di rottura. In modo alternativo, la normalità non esiste e il flusso può anche essere “*non associato*”. Per materiali attritivi, per cui lo stato ultimo è descritto dal criterio di rottura di Mohr-Coulomb, sono preferibili le leggi del flusso “non associato” e la deformazione plastica è descritta dalla funzione potenziale plastico. Al fine di formulare una descrizione teorica, devono essere affrontate tre tematiche principali: il criterio di rottura, la legge di flusso e la legge di incrudimento.

#### **Criterio di resistenza**

Il criterio o la funzione di resistenza, definisce lo stato di sollecitazione in cui la risposta del materiale cambia da elastica a plastica. Si definisce la funzione di resistenza  $F$ , che è funzione delle tensioni  $\sigma$  e delle quantità  $\alpha$  e  $W_p$  che controllano l’incrudimento.

$$F = F(\sigma, \alpha, W_p)$$

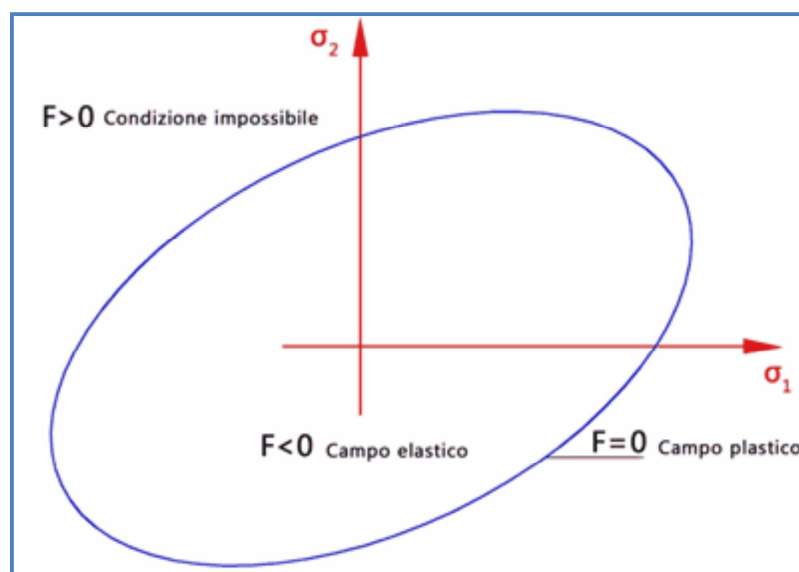


Fig. 43- Superficie di snervamento

Se si valuta  $F$  (vedi fig.43) si possono ottenere i seguenti risultati:

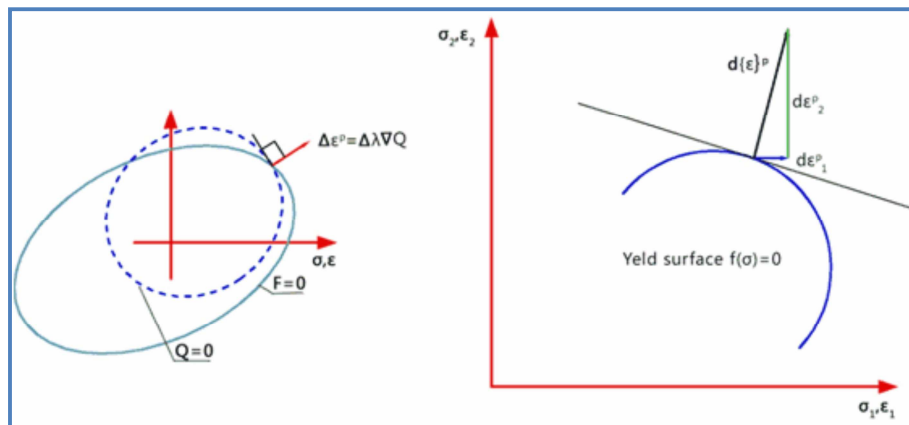
- $F < 0$ , condizione elastica;
- $F = 0$ , lo snervamento sta iniziando oppure è già in atto;
- $F > 0$ , condizione fisicamente impossibile.

### **Legge del flusso plastico**

Le leggi del flusso plastico mettono in relazione gli incrementi di deformazione plastica con gli incrementi delle tensioni in seguito all'insorgenza del cedimento iniziale. Si definisce il potenziale plastico  $Q$  funzione delle tensioni e del lavoro plastico  $W_P$  (per unità di volume), cioè  $Q=Q(\sigma, \alpha, W_P)$ . Gli incrementi della deformazione plastica (legge del flusso plastico) sono dati da:

$$d\epsilon^p = \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \cdot d\lambda$$

dove  $d\lambda$  rappresenta uno scalare chiamato "moltiplicatore plastico". Questa legge è conosciuta come legge di normalità del flusso plastico perché le relazioni sopra riportate possono essere interpretate nel senso che il vettore degli incrementi delle deformazioni plastiche sono normali alla superficie di snervamento (vedi fig.44).



**Fig. 44-** (a) Rappresentazione geometrica dell'incremento di deformazione plastica;  
(b) Legge di normalità del flusso plastico.

La legge di flusso si dice "associata" se  $Q$  è pari ad  $F$ , "non associata" altrimenti. Le leggi di flusso associate sono comunemente utilizzate per i metalli duttili, mentre le leggi non associate sono più adatte a modellare il terreno e i materiali granulari.

### **Legge di incrudimento**

La legge di incrudimento prevede la variazione della superficie di snervamento a causa delle deformazioni plastiche. Si possono formulare due leggi di incrudimento:

- Incrudimento isotropo: con cui si ignora l'effetto di **Bauschinger** ma si espande o contrae il range elastico, senza cambiamento di forma né di posizione.

- Incrudimento cinematico: che tiene conto dell'effetto di Bauschinger, ma il range elastico resta costante, assistendo soltanto ad una traslazione rigida della superficie.

L'incrudimento isotropo può essere rappresentato dal lavoro plastico per unità di volume come sotto riportato dalla relazione seguente:

$$W_p = \int d\sigma^T \cdot d\varepsilon^p$$

### **Relazioni Tensione-Deformazione incrementali**

Si assume che gli incrementi di deformazione includano componenti sia elastiche sia plastiche e che tali incrementi siano molto piccoli. È possibile determinare una relazione incrementale tensione-deformazione analoga alla relazione di elasticità. Durante un incremento della deformazione plastica,  $dF=0$  e si avrà:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} \cdot d\sigma + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \cdot d\alpha + \frac{\partial F}{\partial W_p} \cdot dW_p = 0$$

Facendo le opportune sostituzioni abbiamo:

$$d\sigma = E \cdot d\varepsilon^e = E \cdot (d\varepsilon - d\varepsilon^e) = E \cdot \left( d\varepsilon - \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \cdot d\lambda \right)$$

L'equazione risultante da risolvere per ottenere il moltiplicatore plastico è:

$$d\lambda = P_\lambda \cdot d\varepsilon$$

dove  $P_\lambda$  è un vettore in cui sono inclusi sia il lavoro di incrudimento sia il lavoro di deformazione come segue:

$$P_\lambda = \frac{\frac{\partial F^T}{\partial \sigma} \cdot E}{\frac{\partial F^T}{\partial \sigma} \cdot E \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma} - \frac{\partial F^T}{\partial \sigma} \cdot C \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma} - \frac{\partial F}{\partial W_p} \cdot \sigma^T \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma}}$$

Per cui riordinando i termini si ha:

$$d\sigma = E_{ep} \cdot d\varepsilon \rightarrow E_{ep} = E \cdot \left( I - \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \cdot P_\lambda \right)$$

dove:

- $I$  è una matrice unitaria o identità;
- $E_{ep}$  è la matrice costitutiva tangente elastoplastica.

inoltre si ha che:

- se  $Q=F$  (in aggiunta alla legge del flusso), la matrice  $E_{ep}$  risulta simmetrica.
- Per  $F < 0$  (non si verifica lo snervamento) o per  $F=0$  e  $dF < 0$  (fase di scarico dello stato plastico) allora  $E_{ep}$  è pari a  $E$ .

La matrice delle rigidezze tangente  $K_T$  è data dall'equazione

$$K_t = \int_V B^T \cdot E_{ep} \cdot B \cdot dV$$

## **Criteri di rottura**

I criteri di rottura per la modellazione dei terreni sono numerosi e di complessità crescente con l'introduzione di leggi costitutive a più parametri. Per i problemi di rottura e non di esercizio si è visto che i legami costitutivi sotto riportati ci permettono di ottenere praticamente gli stessi risultati di quelli più complessi permettendoci di ottenere un onere computazionale modesto. I legami riportati sono in relazione al comportamento drenato e non dell'opera:

1. *Criteri di Von Mises (Plastico J2);*
2. *Criterio di Mohr-Coulomb e Drucker Prager;*
3. *Criterio di Tresca.*

Il criterio 1 e 3 sono utilizzati per analisi in condizioni non drenate, mentre il criterio 2 per comportamenti drenati e non drenati.

### **Criterio di Von Mises (Plastico J2);**

Tale criterio è quello che è stato utilizzato nella modellazione operata in Nòlian e descritta nella prima parte del presente documento. Il criterio considera tutte e tre le direzioni principali dello sforzo di taglio. In questo caso la funzione di snervamento è data da

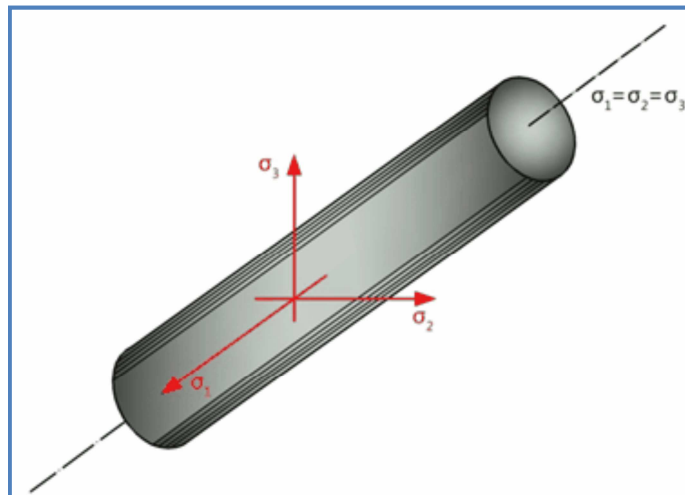
$$F(J_2) = \sqrt{J_2 - k}$$

oppure, in termine della cosiddetta sollecitazione equivalente, come:

$$F(\bar{\sigma} - \sigma_0)$$

dove:

$$\bar{\sigma} = (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{1}{2} \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2} \cdot (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{2} \cdot (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} =$$
$$\left[ \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \frac{1}{2} \cdot (\sigma_y - \sigma_z)^2 + \frac{1}{2} \cdot (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{yz}^2 + 3\tau_{zx}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$



**Fig. 45-Criterio di Von Mises nello spazio delle tensioni principali**

Per applicazioni con deformazione piana si assume che non ci siano variazioni plastiche del volume ed in condizioni triassiali si hanno rispettivamente :

$$\sigma_0 = \sqrt{3} \cdot c_u \quad \sigma_0 = 2 \cdot c_u$$

dove  $c_u$  rappresenta la coesione non drenata o la resistenza al taglio del terreno. Se si rappresentano nello spazio tridimensionale le tensioni principali, la superficie di snervamento è rappresentata da un cilindro parallelo all'asse idrostatico come mostrato nella fig. 45.

### **Il criterio di Mohr Coulomb e di Tresca**

Nel piano principale delle tensioni, il criterio assume la forma di un cono irregolare a base esagonale (vedi fig.46). Il criterio può essere scritto in funzione delle tensioni principali come:

$$F_{mc} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \cdot \sin \varphi - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - c \cdot \cos \varphi$$

Per cui le tensioni principali sono date da:

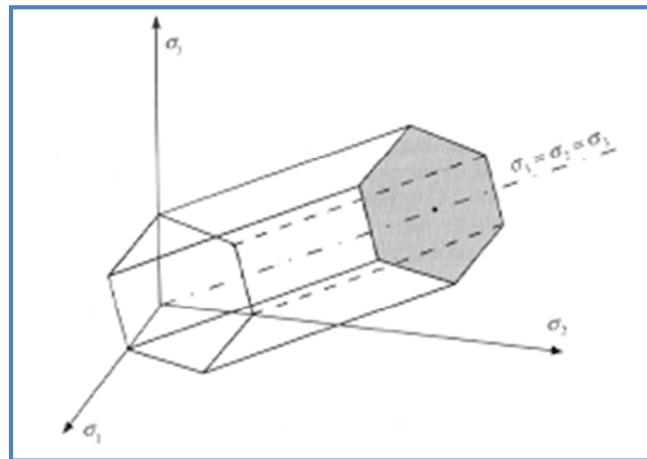
$$\sigma_1 = \sigma_m + \frac{2}{3} \cdot \bar{\sigma} \cdot \sin \left( \vartheta - \frac{2}{3} \pi \right) \quad \sigma_3 = \sigma_m + \frac{2}{3} \cdot \bar{\sigma} \cdot \sin \left( \vartheta + \frac{2}{3} \pi \right)$$

dove le tensioni medie e deviatoriche sono definite dalle equazioni

$$\sigma_m = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot s \rightarrow \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot t$$

Gli invarianti  $s$  e  $t$  sono:

$$s = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad t = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2}$$



**Fig. 46**-Criterio di Mohr-Coulomb nello spazio delle tensioni principali

Sostituendo  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  nell'equazione sopra riportata si ottiene:

$$F_{mc} = \sigma_m \cdot \sin \varphi + \bar{\sigma} \cdot \left( \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{3}} - \frac{\sin \vartheta \cdot \sin \varphi}{3} \right) - c \cdot \cos \varphi$$

Il criterio di Tresca si ottiene dall'equazione precedente ponendo  $\varphi = 0$ , ottenendo quindi:

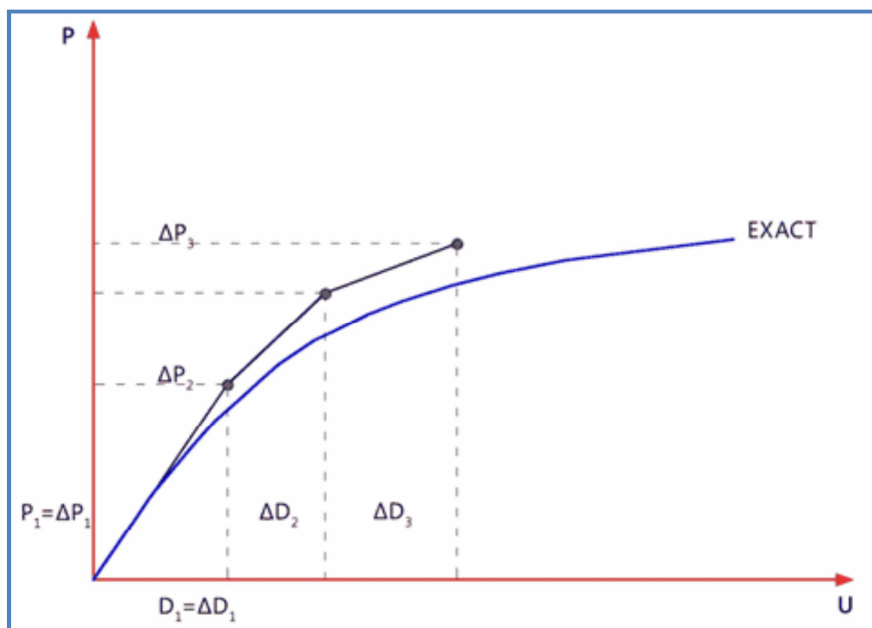
$$F_t = \frac{\bar{\sigma} \cdot \cos \vartheta}{\sqrt{3}} - c_u$$

## 5. PROCEDURE NUMERICHE PER MODELLAZIONI GEOTECNICHE

Vengono descritte brevemente nel seguito alcune procedure di risoluzione numerica, che per il metodo che adottano risultano particolarmente idonee per applicazioni atte a descrivere il comportamento dei terreni.

### **Procedure elasto-plastiche**

Quando un materiale ha un comportamento non-lineare, le proprietà del materiale dell'elemento si assumo essere quelle determinate nei suoi punti di campionamento. Tipicamente questi punti sono stazioni di quadratura per la legge di integrazione numerica. In ciascuno di questi punti si determinano le tensioni che vengono poi aggiornate durante il ciclo di calcolo. Al fine di ridurre l'onere computazionale, il numero di punti deve essere piuttosto piccolo, mentre per riuscire a valutare in maniera più accurata la variazione della resistenza negli elementi individuali, è indispensabile utilizzare un numero maggiore di punti di campionamento (vedi fig.47).



**Fig. 47**-Procedura di analisi non lineare.

L'implementazione delle relazioni costitutive elasto-plastiche, in un contesto ad elementi finiti, richiede la considerazione di due differenti livelli, il livello globale e il livello del materiale. A livello globale l'equilibrio deve essere soddisfatto così come in ogni altro calcolo lineare o non-lineare a elementi finiti, mentre a livello del materiale devono essere soddisfatte le relazioni di plasticità. Eseguendo la discretizzazione degli elementi finiti, in definitiva, si ottiene l'Equazione :

$$K \cdot U = F$$

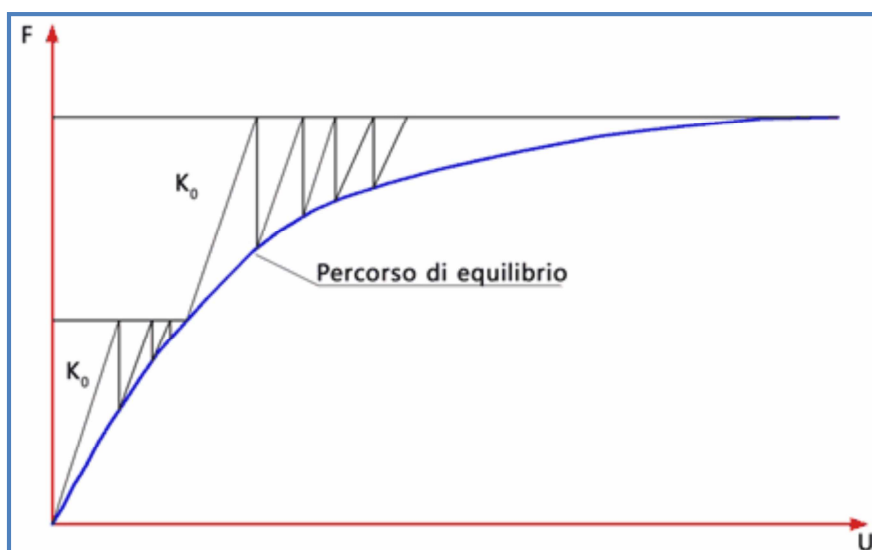
dove

- $F$  rappresenta il vettore dei carichi applicati,
- $U$  rappresenta il vettore spostamento
- $K$  la matrice delle rigidezze.

Poiché la relazione tensione-deformazione è non-lineare, la matrice costitutiva dipende dallo stato attuale delle tensioni della matrice delle rigidezze (non-lineare). Si possono pertanto adottare due tipologie di soluzioni per modellare la non-linearità del materiale. Con entrambi i metodi di risoluzione, il carico viene incrementato in diversi step e la soluzione si ottiene attraverso una serie di linearizzazioni.

### **Metodo delle rigidezze costanti**

Il primo approccio si sviluppa con iterazioni a rigidezze costanti in cui la non-linearità è introdotta modificando iterativamente il vettore dei carichi. La matrice delle rigidezze globale, di solito elastica, in tale analisi viene formata una sola volta. Ciascuna iterazione, in questo modo, rappresenta un'analisi elastica. La convergenza si ottiene quando le tensioni generate dai carichi soddisfano la legge tensione-deformazione o il criterio di rottura ipotizzato, rispettando una prefissata tolleranza (vedi fig.48).



**Fig. 48-Metodo a rigidezze costanti**

Il vettore dei carichi, in ogni iterazione, è determinato dall'applicazione dei carichi esterni e dai carichi auto-equilibranti. I carichi di volume hanno l'effetto di ridistribuire le tensioni (o i momenti) nel sistema, senza alterare il carico netto. Per problemi con carico-controllato, quanto più ci si avvicina alla rottura, maggiore sarà il numero di iterazioni richieste, perché la matrice delle rigidezze globale elastica inizia a sovrastimare la rigidezze reale del materiale. Gli effetti delle azioni plastiche possono essere considerati come le tensioni iniziali che produrrebbe un carico fittizio combinate con quelle del carico realmente applicato. Questa



procedura evita che le fasi onerose di calcolo, come la formazione e la fattorizzazione della matrice delle rigidezze tangente, siano effettuate ripetutamente, ma la convergenza si presenta tanto più lenta quanto maggiori saranno le deformazioni plastiche. Il metodo a rigidezze costanti appena descritto utilizza soluzioni elastiche per ottenere la convergenza in maniera iterativa, variando i carichi del sistema. Con ciascun incremento di carico, il sistema di equazioni  $K \cdot U_i = F_i$  deve essere risolto per gli incrementi degli spostamenti globali, dove  $K$  è la matrice delle rigidezze globale ed  $F_i$  il vettore dei carichi (di volume) globali interni ed esterni. I singoli incrementi di spostamento  $u_i$  estratti da  $U_i$  sono dati dalla relazione:

$$\Delta \varepsilon_i = B \cdot u_i$$

Durante ogni ciclo di calcolo, assumendo il materiale prossimo allo snervamento, le deformazioni contengono componenti sia elastiche sia plastiche, cosicché:

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^e + \Delta \varepsilon^p$$

Solo gli incrementi di deformazione elastica  $\Delta \varepsilon^e$  generano delle tensioni, come mostra l'equazione seguente:

$$\Delta \sigma = E \cdot \Delta \varepsilon$$

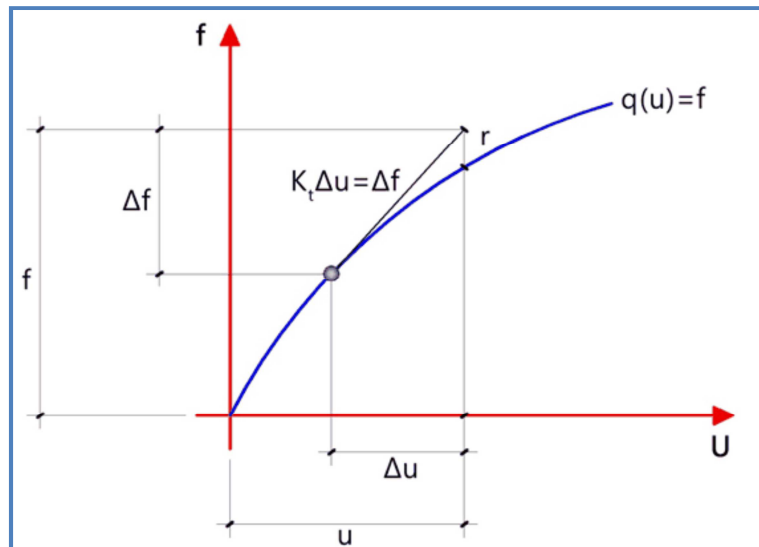
Questi incrementi delle tensioni si aggiungono alle tensioni provenienti dalla fase precedente di carico: le tensioni vengono così aggiornate e sostituite nel criterio di rottura. Se è necessaria la redistribuzione delle tensioni, vuol dire che il criterio di resistenza non risulta soddisfatto ( $F > 0$ ). La redistribuzione si effettua modificando il vettore  $F_i$  degli incrementi di carico nel sistema di equazioni globale, corrispondente al ciclo di carico  $i$ . Il vettore  $F$  è composto da due tipi di carichi:

$$F = F_a + F_b^i$$

$F_a$  che rappresenta l'incremento di carico esterno attualmente applicato ed  $F_b^i$  il vettore dei carichi di volume che varia da un'iterazione all'altra e che deve essere auto-equilibrato cosicché il carico netto sul sistema non sia influenzato da esso.

### ***Metodo delle rigidezze tangenti***

Il secondo approccio, prende in considerazione la riduzione della rigidezza del materiale. Se si considerano step di carico abbastanza piccoli, il metodo diventa equivalente al metodo esplicito di Eulero. Secondo questo approccio la matrice delle rigidezze globale deve essere aggiornata periodicamente e le iterazioni per raggiungere la convergenza si effettuano utilizzando i carichi di volume residuali (vedi fig.49).



**Fig. 49-** Step di carico nel metodo a rigidezza tangente.

Contrariamente a quanto avviene con l'approccio a rigidezza costante, l'onere aggiuntivo di riassemblare e rifattorizzare la matrice delle rigidzze globale nel metodo di rigidezza variabile, è compensato dalla riduzione del numero di iterazioni necessarie che diminuisce quanto più si è vicini alla rottura. L'algoritmo richiede che la rappresentazione della relazione tra tensioni-deformazioni debba essere memorizzata, cosicché le tensioni e le costanti elastiche possano essere ricavate per ogni deformazione. Si devono inoltre memorizzare ed aggiornare, per ogni punto di campionamento di ciascun elemento e dopo ogni ciclo di calcolo, le deformazioni, le tensioni e gli spostamenti nodali. E' pertanto necessaria una relazione incrementale tra spostamenti e forze:

$$K_t \cdot \Delta u = \Delta F$$

dove  $K_t$  è la matrice delle rigidzze tangente e l'equazione sopra riportata rappresenta la forma linearizzata dell'equazione non lineare:

$$K_t = \int B^T \cdot E^{pl} \cdot B dV$$

Il calcolo procede con l'applicazione di un incremento di carico  $\Delta F$  e con il calcolo del corrispondente incremento dello spostamento con l'Equazione (Fig. 15). L'incremento della deformazione è valutata nel solito modo, cioè:

$$\Delta \varepsilon = B \cdot \Delta u$$

Successivamente le tensioni vengono calcolate con la relazione costitutiva elasto-plastica:

$$\Delta \sigma = (E - E^{ep}) \cdot \Delta \varepsilon = E^{pl} \cdot \Delta \varepsilon$$

Questa rappresenta una relazione non lineare fintanto che la matrice  $E_{ep}$  dipende dallo stato tensionale corrente e la procedura iterativa generale può così essere utilizzata. Sulla base, quindi, del calcolo delle tensioni, il vettore delle forze interne  $Q$  può essere valutato risolvendo l'integrale seguente:

$$Q = \int B^T \cdot \sigma \cdot dV$$

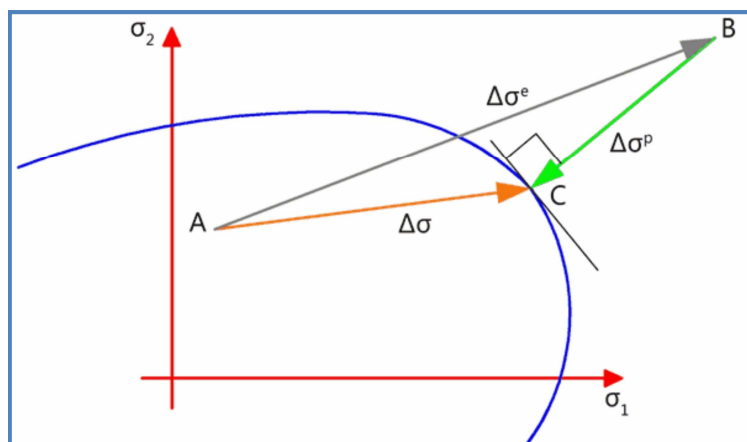
che deve essere bilanciato dal carico totale applicato  $F$ , pertanto, la forza residua svanisce:

$$R = Q - F$$

Se il valore della forza residua è diverso dalla tolleranza prefissata, vuol dire che è applicata come un carico esterno seguendo la procedura di Newton-Raphson. Questa forza residua offre un nuovo incremento della deformazione e un corrispondente nuovo incremento della tensione, che deve essere determinato tramite la relazione costitutiva elasto-plastica non lineare, calcolando successivamente un nuovo valore residuale e così via finché il valore residuo non diventi sufficientemente piccolo. La procedura può essere schematizzata come segue:

1. Si applica l'incremento di carico  $\Delta F$  e si trovano i valori degli incrementi dello spostamento e della deformazione, rispettivamente  $\Delta u$  e  $\Delta \epsilon$ .
2. Si determina l'incremento di tensione  $\Delta \sigma$  dall'equazione.
3. Si calcola il valore residuo  $R$ .
4. Se  $\|R\| < \text{tolleranza}$  si ricava  $K_t$  e si ritorna allo step 1

Così, il calcolo di uno step di carico richiede una procedura iterativa globale dove le forze non bilanciate, anche dette residuali, devono svanire, così come prevede la procedura al fine di calcolare gli incrementi delle tensioni (step 2). L'aggiornamento delle tensioni si effettua in ogni punto di integrazione. Per calcolare l'incremento delle tensioni causato dall'incremento delle deformazioni, si usa uno schema di integrazione all'indietro. Essenzialmente il metodo consiste nell'applicazione di predittore elastico seguito da un correttore plastico, al fine di garantire che la tensione finale sia quasi sulla superficie di rottura (vedi fig.50).



**Fig. 50-** Correzione dello stato tensionale con ritorno sulla superficie ortogonale

## BIBLIOGRAFIA

- Programming the finite element method: I.M. Smith, D.V. Griffiths and L. Margetts, 5th ed., John Wiley & Sons, 2014
- Griffiths, D., V.; Lane, P., A. (1999) Slope stability analysis by finite elements. Géotechnique, Vol. 49 (3), 387-403.
- Potts, D. M. & Zdravkovic, L. 1999, Finite element analysis in geotechnical engineering: Theory, Thomas Telford, London, UK.
- J. M. Duncan, State of the art: limit equilibrium and finite-element analysis of slopes. J. Geotech. Engng, ASCE 122, 7, 577-597 (1996).
- Duncan, J. M. & Wright, S. G. 2005, Soil strength and slope stability Hoboken, N.J.: Wiley.
- Chen, W. F. 1975, Limit analysis and soil plasticity, Amsterdam; Oxford: Elsevier.
- Bromhead, E. N. 1992, The stability of slopes, 2nd, London: Blackie Academic
- Le analisi agli elementi finiti in geotecnica. Valutazione di stabilità dei pendii. Con Software professionale FEA Slope Light. A. Rabuffetti editore: Maggioli (2012)
- Manuale di Geotecnica Avanzata di Angelo Silvio Rabuffetti - DEI Tipografia Del Genio Civile - 2012
- Manuale di Progettazione Geotecnica di Angelo Silvio Rabuffetti : DEI Tipografia Del Genio Civile - 2011
- Manuale avanzato di meccanica delle terre di Romolo Di Francesco : Dario Flaccovio Editore - 2014
- Introduzione al metodo degli elementi finiti di Romolo Di Francesco : Dario Flaccovio Editore - 2012
- Introduzione alla meccanica delle terre di Romolo Di Francesco : Dario Flaccovio Editore - 2013
- Airò Farulla C. (2001). Analisi di stabilità dei pendii. Hevelius Editore.
- Pellegrino A. (1997). Interventi di stabilizzazione dei pendii, CISM Udine.
- Lee W. Abramson, Thomas S. Lee, Sunil Sharma, Glenn M. Boyce (2002). Slope stability and stabilization methods. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Nòlian All-in One : Manuale Teorico e Manuale EE (Softing. Srl- Roma);