Riflessioni sulla formulazione di soluzioni numeriche per l'ingegneria

di Roberto Spagnuolo
24 novembre 2011

In questa nota mi propongo di esaminare la più diffusa metodologia di soluzione per via numerica di problemi per l'ingegneria e di mostrare come vi sia spesso un errore metodologico non privo di conseguenze negative che potrebbe essere evitato se si riesaminassero certi atteggiamenti alla luce della soluzione informatizzabile delle procedure numeriche. Applicherò al problema della verifica a taglio di sezioni armate in calcestruzzo quanto sostenuto.

Il procedimento di informatizzazione dei metodi per l'ingegneria segue generalmente un procedimento non corretto e ciò per motivi "storici". L'ingegneria trova un ausilio determinante nell'analisi infinitesimale nella seconda metà dell'ottocento. La difficoltà di ottenere soluzioni dalle formulazioni differenziali porta a spesso geniali e sempre "pratiche" semplificazioni che dell'ingegneria sono state giusto motivo di vanto in quanto si è trattato di una vera cultura di "ingegnerizzazione" della matematica che così ha potuto fornire ottimi strumenti di indagine.

L'avvento della informatica non ha portato in ingegneria a un ripensamento del passaggio tra formulazione differenziale e impiegabilità pratica dei modelli, ma si è limitata generalmente ad informatizzare le formulazioni semplificate. Ciò è scorretto perché si è dimenticato un passo importante e cioè che era l'ingegnere con il suo buon senso a valutare la affidabilità della soluzione semplificata. Se questa invece viene affidata ad un sistema automatico perde di affidabilità. Oltretutto questo approccio limita inutilmente le possibilità di una soluzione basata su modelli numerici derivati da quelli differenziali.

Una delle poche eccezioni è il metodo degli elementi finiti che costituisce un geniale metodo generale di soluzione di sistemi di equazioni differenziali.

Vediamo ora come queste osservazioni trovino una conferma nella formulazione del taglio nelle NTC 2008, limitandoci alla formula 4.1.19 per il "taglio compressione"

$$V_{Rcd} = 0,9 \cdot d \cdot b_w \cdot \alpha_c \cdot f'_{cd} \cdot \ \text{ctg}\theta \ /(1+\text{ctg}^2\theta)$$

Qui non ci interessa analizzare la validità del modello sul quale si basa tale espressione, ma solo percorrere il processo di informatizzazione. Ora vediamo subito che f'_{cd} è dato, ctg θ è un termine legato alla teoria del traliccio a inclinazione variabile ed è basato su un semplice modello che non desta problemi di informatizzazione. Anche b_w è la corda lungo la quale si calcola lo scorrimento. Il problema è allora il termine 0.9 d α_c. Infatti se non ci si trova nel caso di una sezione rettangolare sollecitata lungo uno degli assi d'inerzia, il valore di d non è determinato ed il coefficiente 0,9 non è detto sia valido. Che fare?

Una strada è quella di ripercorrere le soluzioni approssimate usate storicamente e usarle discriminando la loro applicabilità. Cioè: una formulazione per la sezione circolare, un'altra per la trave a T e così via.

Ora se vi è un procedimento che va sistematicamente evitato, quando possibile, nel formulazione di un algoritmo è proprio la proliferazione dei percorsi tra entrata ed uscita. Tale complessità venne osservata da McCabe e definita "complessità ciclomatica" ed è una metrica del software. McCabe sconsigliava che un singolo "modulo" logico si superasse la complessità 10, ovvero 10 percorsi alternativi. Il motivo è chiaro: più sono le strade possibili più è facile introdurre errori e, nel caso, non trovarli e più aumenta anche la possibilità di generare discontinuità nella soluzione ed anche instabilità in quanto piccole differenze dei dati di ingresso potrebbero portare a metodi di soluzione diversi e non necessariamente in grado di dare soluzioni continue. Quindi già questo non va bene. Ma c'è di peggio: le semplificazioni adottate gioco forza nel passato sono molto approssimate e quindi nullificano un approccio che invece offre la potenza dei metodi numerici. Quindi occorre TORNARE INDIETRO, dimenticare la soluzione in formule algebriche che anche un non-programmatore può includere in un programma, e ricominciare da capo.

Da dove mai deriva il termine che ci preoccupa? Cioè il pericoloso 0.9 d α_c? Il termine 0.9 d è il notissimo "braccio delle forse interne" che a sua volta deriva dalla teoria del taglio di Jourawsky applicata ad una sezione omogeneizzata in calcestruzzo. Quindo occorre ancora TORNARE INDIETRO a Jourawsky e alla sua teoria formulata ben nel 1856. questa teoria è detta "approssimata" e lo è, ma non nei termini del campo di applicazione che stiamo esaminando, e quindi chi deve risolvere il grosso problema di determinare il famigerato 0.9 d α_c può senz'altro ritenere impiegabile. Ma come applicarla con i metodi dell'analisi numerica?

Riporto qui di seguito la trattazione della teoria di Jourawsky che ho ripreso da internet ma che purtroppo non reca il nome dell'autore che citerei volentieri anche per gratitudine per la fatica che mi ha evitato di scrivere le formule.

Soluzione. Consideriamo per semplicità una sezione rettangolare* soggetta all'azione di taglio T_y e, per garantire l'equilibrio, di momento flettente M_x. Dato il tratto infinitesimo dz, sulle facce z e $z+dz$ agiranno le tensioni normali e tangenziali come in figura. Le tensioni normali sono:

$$\sigma_{zz}=\frac{M_x}{J_x}y \qquad \sigma_{zz}+\sigma_{zz,z}dz=\left(\frac{M_x+M_{x,z}dz}{J_x}\right)y=\left(\frac{M_x+T_y dz}{J_x}\right)y\cdot$$

e, data una corda parallela all'asse x, definiamo il *valore medio* della tensione tangenziale

$$\overline{\tau}_{yz}=\frac{1}{b}\int_{-b/2}^{b/2}\tau_{yz}dx\cdot$$

Isoliamo una porzione di un tronco infinitesimo di area A' sottesa dalla corda b ed imponiamo l'equilibrio alla traslazione lungo l'asse z dell'elemento. Le forze risultanti che agiscono sono:

$$R_\sigma=\int_{A'}\sigma_{zz}dA \qquad R_\sigma+R_{d\sigma}=\int_{A'}\left(\sigma_{zz}+\sigma_{zz,z}dz\right)dA \qquad R_\tau=dz\int_{-b/2}^{b/2}\tau_{yz}dx$$

L'equilibrio stabilisce:

$$R_{d\sigma}+R_\tau=0 \quad \text{in cui} \quad \left.\begin{aligned} R_{d\sigma}&=dz\int_{A'}\sigma_{zz,z}dA=dz\frac{T_y}{J_x}\int_{A'}ydA=dz\frac{T_yS_x'(y)}{J_x}\\ R_\tau&=dz\int_{-b/2}^{b/2}\tau_{yz}dx=dz\ \overline{\tau}_{yz}b\end{aligned}\right\} \quad \overline{\tau}_{yz}=-\frac{T_yS_x'}{J_xb} \quad \text{formula di Jourawsky}$$

La formula esprime il *valore medio* delle tensioni tangenziali lungo la generica corda b. Il momento statico $S_x'(y)$ è calcolato per la porzione di area A' e rispetto all'asse x.

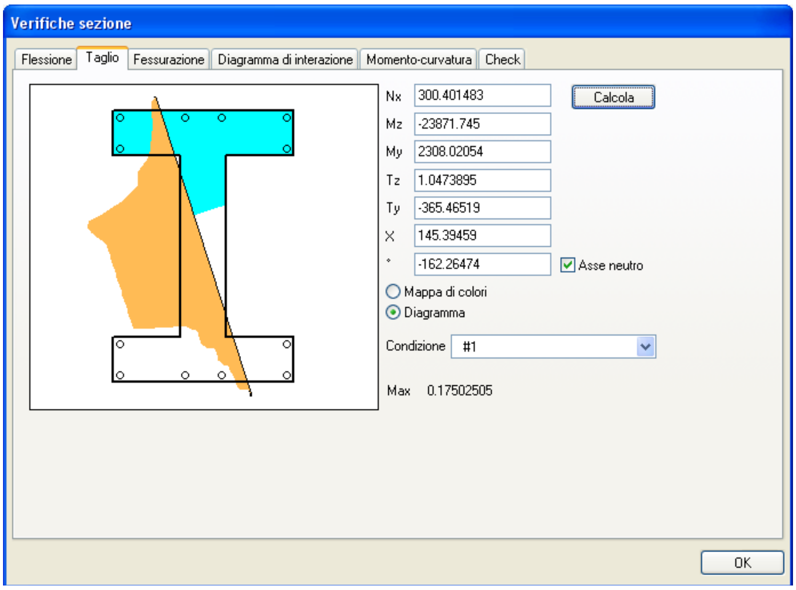
Quello che qui ci interessa è vedere innanzitutto l'origine dello 0.9 d che non è altro che S/J ma soprattutto il primo integrale dell'ultima coppia di formule che ci dice come lo scorrimento τ b sia dato dall'integrale della variazioni delle tensioni longitudinali.

Quest'ultimo è un problema ben formulato per essere risolto con corretti e stabili metodi già consolidati di analisi numerica. Infatti non vi è più il problema dell'omogeneizzazione necessaria per valutare S e J (cosa che sarebbe invece comodissima per sezioni omogenee). L'integrazione numerica delle tensioni può quindi essere correttamente eseguita tramite integrali di Green o con la “regola del trapezio” o infine con una semplice sommatoria dei contribuiti delle singole fibre di una formulazione a fibre dando, quest'ultima formulazione, anche la possibilità di integrare contributi dovuti a materiali diversi o differentemente degradati, come nel caso di una sezione sottoposta ad incendio.

Infine veniamo al coefficiente α_c. Benché la normativa non lo specifichi, e non ho trovato trattazioni al riguardo, sono convinto sia un termine modificatore del braccio delle forze interne per tener conto in modo empirico della forza assiale. Nella soluzione ottenuta per integrazione della variazione di tensioni longitudinali, in effetti di questo termine non si ha bisogno perché la porzione di calcestruzzo compresso è considerata in modo corretto.

Questo è il metodo che noi abbiamo sviluppato fin dal '96 e che a tutt'oggi ha dato buona prova anzi talvolta ottima mettendo in risalto delle profonde zone d'ombra dei metodi semplificati. Non occorre dire che questo metodo essendo del tutto generale si applica a qualsiasi sezione comunque sollecitata.

Chi volesse “giocare” con questo metodo, può farlo con il dimostrativo di EasyBeam che consente di diagrammare l'andamento delle tensioni tangenziali lungo una sezione generica. Ed ho usato il termine “giocare” non per banalizzare le cose ma perché l'ergonomia dell'interfaccia dei nostri metodi dà, a chi ama l'ingegneria e ne è un curioso attento, una gioia che davvero e tipica del “gioco”.



Questo mi pare un esempio eclatante di come il metodo di “riprogetto” delle soluzioni numeriche sulla originale formulazione differenziale sia convincente ed efficiente e questo dovrebbe far riflettere anche chi redige la normativa per favorire i metodi numerici indispensabili in una normativa che è applicabile ESCLUSIVAMENTE per via automatica.

Nota integrativa (30 novembre 2011)

Poiché dopo la pubblicazione di questo articolo mi sono stati richiesti alcuni chiarimenti, ritengo opportuno riportarli in questa nota integrativa.

La soluzione esplicita per flessione e taglio di de Saint Venant non si presta ad un'agevole soluzione analitica, però si può cogliere l'andamento delle tensioni tangenziali in modo molto più semplice ma sufficientemente accurato per fini applicativi identificando le tensioni effettive con il loro valore medio usando solo condizioni di equilibrio. Questa è l'**ipotesi** di Jourawsky che non va confusa con la **formula** di Jourawsky. Sulla ipotesi di Jourawsky si basano tutti i metodi pratici di analisi del taglio, compresi quelli di normativa, attualmente in uso.

Non vanno confuse le ricerche in atto sul fenomeno del taglio, fenomeno tuttora non completamente noto, con la necessità di applicare correttamente i modelli di calcolo già disponibili che tali ricerche, finché non porteranno a risultati accettati dalla comunità a dalla normativa, non sostituiscono.

Un cenno ad un metodo approssimato molto citato in quanto ha una formulazione ingegneristica, è quello di ritenere che si possa scomporre una sezione in rettangoli ed a questi applicare i dettami di normativa per le sezioni rettangolari. Di tale ipotesi non ha, al momento attuale, alcuna dimostrazione se non “figurativa” della liceità in quanto la formula semplificata della normativa presuppone che la sezione sia in equilibrio, cosa che non si verifica per la singola striscia ove non è presente armatura e non si può assumere come asse neutro quello dell'intera sezione. Ciò facendo senza altri accorgimenti non si fa altro che eseguire un'integrazione in modo molto, molto grossolano applicando la **formula** semplificata (e non l'**ipotesi**) di Jorawsky per sezioni omogeneizzate a parti singole invece che al tutto senza conseguire significativi vantaggi pratici e basandosi su ipotesi non dimostrate e teoricamente molto discutibili e ingiustificati.

Sottolineo che il mio riferimento alla **formula** di Jourawsky non era per asserirne la validità ma al contrario per indicarne i limiti, suggerire una soluzione più algoritmicamente accurata e soprattutto dimostrare la stretta relazione tra questa formula e la attuale normativa e, indirettamente, validare alla luce della nornativa il metodo da me proposto.

Infine, i lettori più attenti si sono preoccupati della applicabilità della formula di Jourawsky in campo non lineare o meglio in regime plastico come richiesto dallo stato ultimo. Tale operazione che riguarda la formula e non il principio di Jorawsky, è possibile ma a mio avviso aumentano i dubbi sull'ipotesi di omogeneizzazione alla base della formulazione molto semplificata della normativa. Quindi il **principio** di Jourawsky non va confuso con la sua **formula** essendo il principio applicabile (in mancanza di meglio oggi con ammissione in tal senso anche da parte della normativa che ne fa uso) anche allo stato limite purché l'integrazione delle tensioni venga fatta con i valori di tensione dati dai legami costitutivi non lineari. E questo è tra l'altro il vantaggio del metodo numerico proposto che può essere infatti impiegato anche in campo non lineare.

A questo proposito si può dare alla (3.18.1) una forma opportuna, più semplice, osservando che:

$$\frac{J_x}{S^o_x} = z \qquad (3.19.1)$$

dove S^o_x è il momento statico rispetto all'asse neutro di tutta la parte di sezione compressa (oppure dell'acciaio teso).

Nella (3.19.1) z è il "braccio delle forze interne" distanza fra le risultanti di compressione e di trazione nella sezione semplicemente inflessa. Per una sezione di altezza utile d, se l'asse neutro si sposta, z varia di poco ed in prima approssimazione si può porre:

$$z = 0,9\ d \qquad (3.19.2)$$

Sostituendo le (3.19.1) e (3.19.2) nella (3.18.1), si ha in corrispondenza dell'asse neutro:

$$\tau = \frac{T}{0,9\ d\ b}$$

E' interessante osservare che si è tenuto conto nella attuale normativa dello stato ultimo convenendo che il "traliccio" cambi di inclinazione per via della fessurazione ma per il legame tra taglio e tensione tangenziale nulla vi è di diverso e probabilmente neanche vi sarebbe ragione per esservi ed infatti ho riportato qui sopra per comodità dei lettori un brano di Appunti delle lezioni di Tecnica delle Costruzioni del 1974 di Remo Calzona (il primo testo che ho trovato tra quelli di tempi non sospetti circa formulazioni innovative) dove si asserisce in modo inequivocabile quanto sostengo e cioè che il modello per il taglio con il metodo delle tensioni ammissibili deriva direttamente e inequivocabilmente e dalla formula di Jourawsky (e non potrebbe essere altrimenti) e che lo 0.9 famoso deriva appunto da una approssimazione usatissima e consolidata nella pratica del passato e che è ritornata identica nella formulazione della attuale normativa gli stati limite. Infatti esplicitando tau dalla formula di normativa e non considerando l'angolo theta perché appunto attinente meccanismi di rottura, la formula è **IDENTICA** a quella usata dai nostri padri e da alcuni di noi per il taglio con le tensioni ammissibili.

Concludo con una osservazione di metodo. Mi sono sempre battuto perché vengano emanati benchmark (casi prova, preferirei) da un organo istituzionale o comunque accreditato per validare i metodi e gli algoritmi di calcolo. Purtroppo nonostante il capitolo 10 della norma si riferisca espressamente alla "validazione" nessuno si è tuttora dichiarato disponibile a pubblicare tali benchmark che "taglierebbero la testa al toro" evitando davvero di finire a parlare di sesso degli angeli invece di "fare" ingegneria.